Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

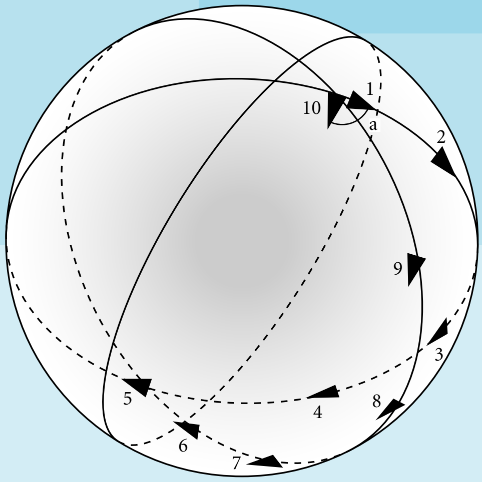
EUCLIDES

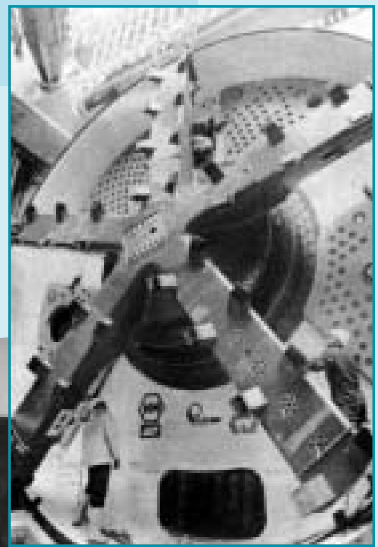
Vakblad voor de wiskundeleraar

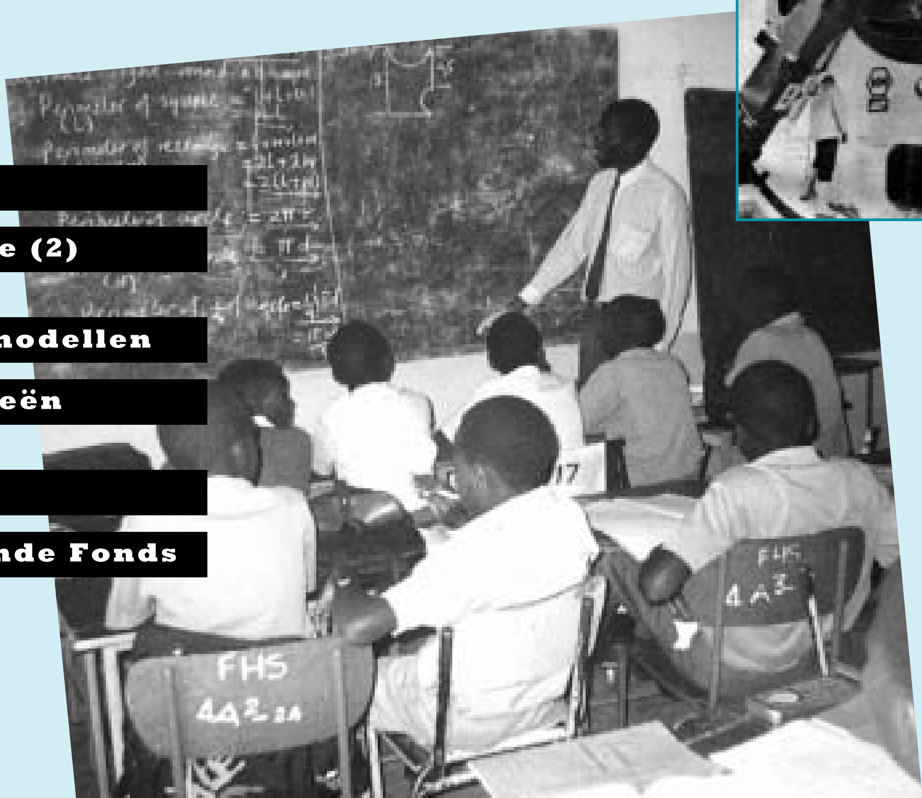
jaargang 74

1998-1999 oktober

2







Foucault en bolmeetkunde (2)

Wiskundige modellen voor epidemieën

Zimbabwe en Wereldwiskunde Fonds

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
113015.261@compuserve.com
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

J. van den Brink
Freudenthal instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

G. van Lent
Admiraliteitskade 21 H
3063 ED Rotterdam

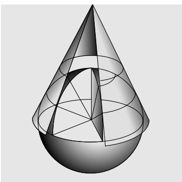
G. Limpers
Boomstede 465
3608 BH Maarssen

J. Lodder
J. vd. Borchstraat 1
3515 XA Utrecht

P. de Roest
Blijhamsterweg 94
9672 XA Winschoten

A.K. van der Vegt
Hof van Delftlaan 47
2613 BK Delft

Inhoud



39



63



68

van de redactietafel



Een drukkerij die afbrandt, een bestand dat zoekraakt, adreswikkels die op zijn. Alle rampen gebeuren in drieën, zegt men wel eens. En zo was het vorig nummer van Euclides zomaar enkele weken te laat.
Onze excuses daarvoor. Ik hoop dat u toch interessante artikelen heeft gelezen over de examens van het afgelopen schooljaar.
Snel na nummer 1 ligt dus deze nummer 2 op de deurmat.

Wereldwiskunde Fonds

In het artikel ‘Zimbabwe en het Wereldwiskunde Fonds’ kunt u lezen hoe de bijdragen die de leden van de Vereniging geven ten behoeve van het fonds, nuttig besteed worden.
Het blijft goed zich bij tijd en wijle te blijven bedenken dat wij het natuurlijk erg zwaar hebben in het huidige wiskundeonderwijs, maar dat elders op de wereld collega’s wiskundedocenten onder heel andere omstandigheden bezig zijn leerlingen de eerste beginselen van de wiskunde bij te brengen.
Op de volgende jaarvergadering/studiedag van de Vereniging kunt u weer boeken te koop aanbieden, waarvan de opbrengst ten goede komt aan dit fonds.

Jaarvergadering/studiedag

Op zaterdag 14 november aanstaande is er weer de traditionele jaarvergadering/studiedag.
Een bijzondere jaarvergadering, omdat een aantal bestuursleden, die zeer veel tijd en energie in de Vereniging hebben gestoken, afscheid zullen nemen.
Deze jaarvergadering is ook bijzonder omdat er een belangrijke wijziging van de structuur van de Vereniging wordt doorgevoerd. In dit nummer treft u het bijbehorende nieuwe huishoudelijk reglement aan en de notulen van de buitengewone ledenvergadering waarop deze veranderingen zijn besproken. Om een beter zicht te krijgen op de voorgestelde veranderingen kunt u de bestuursnotitie er nog eens bij pakken, die in Euclides 73-6 is opgenomen.
Nog een bijzonder punt van deze jaarvergadering is dat de fonkelnieuwe NVvW-website gepresenteerd zal worden.
In één keer heel veel relevante informatie over programma’s, examens, instituten en nog veel meer, snel en actueel bij de hand.
Leest u ook ‘Van de bestuurstafel’ voor meer informatie over bovenstaande zaken.

Schoolboeken

Ongeveer de helft van de scholen is dit schooljaar gestart met herziene boeken voor de basisvorming/onderbouw.
De vorige edities waren allemaal geschreven ‘vanuit het leerplan’. In de nieuwe edities zal zeker rekening gehouden zijn met de ervaringen in de klas. Te hopen valt dat in de praktijk, nu zo’n vijf jaar na een omvangrijke leerplanwijziging, er boeken liggen waarmee evenwichtig het programma uitgevoerd kan worden.
Van de scholen met een havo/vwo bovenbouw is dit schooljaar bijna 25% gestart met de vernieuwde Tweede Fase. De overige 75% zullen gedurende dit schooljaar een methode en een grafische rekenmachine kiezen. Ongetwijfeld zullen daarvoor ook weer bijeenkomsten worden belegd. We houden u daarvan op de hoogte.

Ten slotte

De lezers van Euclides geven regelmatig aan dat ze artikelen over de klassenpraktijk zeer op prijs stellen. De redactie is het daar van harte mee eens. Echter: docenten te vinden die hun ervaringen aan het papier willen toevertrouwen, blijkt nog heel lastig te zijn.
Heeft u suggesties? We houden ons van harte aanbevolen.

Kees Hoogland

Foucault en de bolmeetkunde (2) Sturen op de bol die stuurde

Jan van den Brink

Meetkundeonderwijs

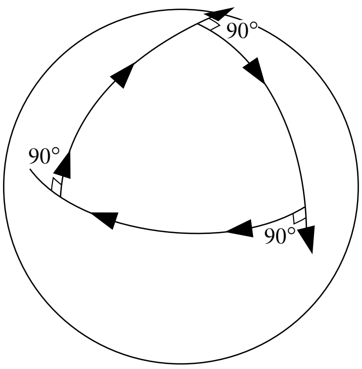
De Parallelverschuiving is interessant voor het meetkundeonderwijs omdat ze de beperktheid van allerlei 'waarheden' toont (zoals 'de som van de draaihoeken van een driehoek is 360°'), interessante meetkundige proefjes mogelijk maakt, praktische toepassingen kent en nieuwe soorten meetkunden kan helpen beheersen. Ik geef voorbeelden.

De som van de draaihoeken van een turtle op de bol

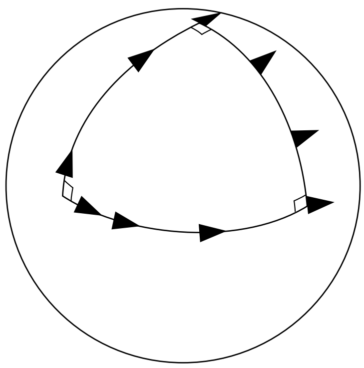
Vroeger had je Logo, een soort meetkundeprogramma op de computer met een turtle die je een draai liet maken of enkele stapjes over het platte scherm, vooruit of achteruit. Met die twee vaardigheden kon de turtle figuren tekenen. Langs een gesloten (convexe) lijn gaand (een driehoek, een veelhoek, een hoekige 'cirkel'), had de turtle bij terugkomst altijd een hele draai gemaakt. De som van de draaihoeken, zeg: buitenhoeken, van de afgelopen veelhoek is 360°, zo luidde de stelling [3]), alsof hij ook iets anders had kunnen zijn [4]). En inderdaad, u raadt het al, op de bol is de som van de draaihoeken niet 360°, maar kleiner. Zet een turtle op de bol, jaag hem rond langs de zijden van een driehoek met drie hoeken van 90° en vraag hem bij terugkomst, staand in dezelfde startrichting, hoeveel graden hij in totaal is gedraaid: 360°.
Met een balpen op de bol als turtle is zo'n tocht langs de drie hoekpunten van een '90°-90°-90°-boldriehoek' na te bootsen (zie figuur 11).
Bij terugkomst op het beginpunt heeft de balpen een hele draai gemaakt. Hier gaan leerlingen twijfelen aan wat ze zien (een hele draai van 360°) en wat ze berekenen (drie draaihoeken van 90° is 270°). Er is een tekort! [5])

De parallelverschuiving alias evenwijdige schuiftochten

Stel de leerlingen voor, om de balpen-turtle 'dan maar' niet te laten draaien. Verschuif hem evenwijdig aan zichzelf over de zijden en de hoekpunten van de 90°-

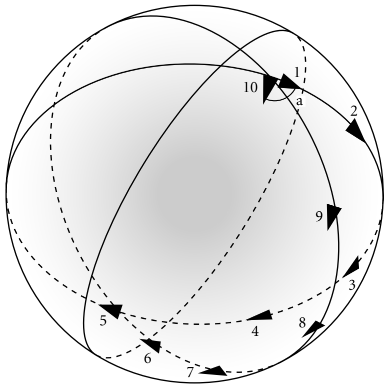


figuur 11



figuur 12

90°-90°-boldriehoek. Hoe staat de pen dan bij terugkomst in het eerste hoekpunt? Langs een platte driehoek komt hij weer in dezelfde startrichting te staan. Maar op de bol? (zie figuur 12.)
De leerlingen zijn verrast: zonder zelf een draai te maken, heeft de balpen bij terugkeer toch een kwartslag opgelopen: 90° kado! [6])
Je kan zelfs evenwijdige schuiftochten over de bol organiseren waarbij de pen een halve (180°) of een driekwart draai (270°) maakt bij terugkeer. Je moet daarvoor een veelhoek nemen met een boloppervlak dat respectievelijk twee keer of drie keer zo groot is als de 90°-90°-90°-boldriehoek. Want, let op, hoe meer boloppervlak je insluit, hoe meer de bol je helpt met draaien (dus hoe minder je zelf hoeft te draaien).
De Parallelverschuiving toont je de hulp van de bol. Voor een 90°-90°-90°-boldriehoek, 1/8 van de hele bol, is die hulp 90°. Voor een kwart bol is de hulp 180°, voor een halve bol 360° en op de Evenaar helpt de bol je helemaal rond. Voor een tweehoek met hoek a (zie figuur 13) is de hulp $2a$. [7])



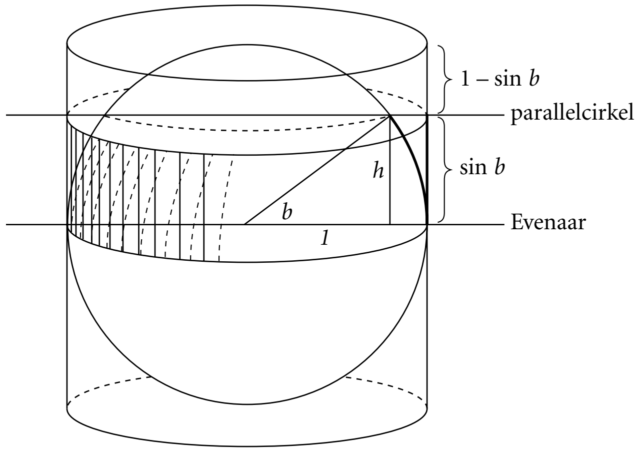
figuur 13

De proefjes op de bol – hoe kinderlijk eenvoudig ook – scheppen onverwachte verrassingen. En daarvan moeten we het toch hebben: je leert ervan. Nog een verrassende proef.

Sturen op de bol en de bol die stuurde

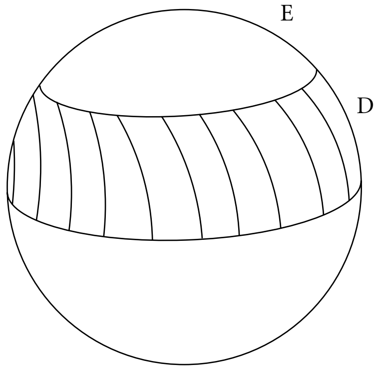
De ene cirkel op de bol is de andere niet. Grootcirkels (bijvoorbeeld de Evenaar) zijn 'rechte' lijnen op een globe. Maar parallelcirkels, parallel aan de 'rechte' Evenaar, zijn zelf geen 'rechte' lijnen. Je merkt het verschil direct als je een speelgoedautootje over beide lijnen oostwaarts laat rijden. Langs de Evenaar hoef je in het geheel niet te sturen. Links en rechts heb je even veel boloppervlak. De Slinger verandert er niet van richting.

Laat je echter op een echte parallelcirkel het autootje een rondje rijden, dan móét je wel sturen. Links en rechts is niet even veel boloppervlakte. Je rijdt als het ware op een schuin kegelvlak aan de bol. En de Slinger? Die vliegt uit de bocht.
Hoe helpt de bol je bij het sturen? Wat zal de oppervlakte van het ingesloten bolkapje ermee te maken hebben?
De draaihoek D over een parallelcirkel op noorderbreedte b is $360° \cdot \sin b$
De ingesloten boloppervlakte tussen Evenaar en deze parallelcirkel is gelijk aan de ingesloten oppervlakte op de omhullende cilinder (Archimedes) (zie figuur 14).



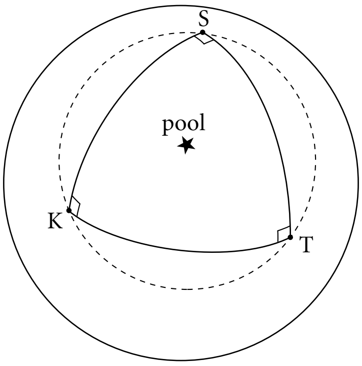
figuur 14

Dus de ingesloten boloppervlakte = ingesloten cilinderoppervlakte = $h \cdot 2\pi = \sin b \cdot 2\pi = D$. Het Exces $E = 360° - D =$ de halve bol minus het ingesloten boloppervlak = oppervlakte van de ingesloten bolkap. Samenvattend (zie figuur 15) : D is wat je zelf stuurt, E is de hulp van de bol. [8])



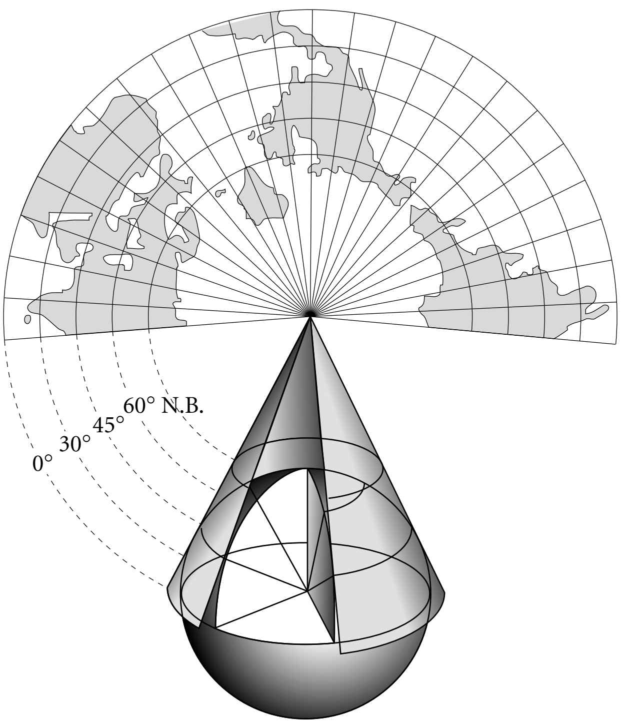
figuur 15

Richtproef



figuur 16

- Probeer het autootje vanuit Kreta te richten op San Francisco, zodat je San Francisco zonder te sturen kan bereiken.
- Maak een reis met het autootje over de globe langs drie plaatsen op ongeveer dezelfde parallelcirkel van 35° NB: vanaf Kreta, via San Francisco en Tokyo en weer terug naar Kreta. Het is een 90°-90°-90°-bol-driehoek (zie figuur 16).



figuur 17

Het kan op twee manieren:
a steeds sturend langs de parallelcirkel of
b in drie sprongen rechtdoor langs drie grootcirkels.
Op welke route hoef je zelf minder te sturen of de draaien?

De oppervlakte van de parallelcirkel is groter dan de oppervlakte van de ingesloten boldriehoek, dus langs de parallelcirkel helpt 'meer bol' je bij het sturen. [9])

Kegelprojectie en de parallelverschuiving

Rechte lijnen hebben in elke kaartprojectie iets bijzonders. Een rechte lijn in de mercatorprojectie is een lijn met vaste kompasrichting over de bol (een loxodroom), een rechte lijn in een gnomische kaartprojectie is de kortste afstand over de globe (een grootcirkel). Rechte evenwijdige lijnen in een kegelprojectie geven de parallelverschuiving van de Slinger langs de raakcirkel aan: de stand van de Slinger op verschillende punten van de parallelcirkel.
Deze kegelprojectie uit een atlas (zie figuur 17) is de uitslag van de kegel die raakt aan de parallelcirkel op 45°. Genua en Toronto liggen bijvoorbeeld op die parallel. Parijs (48,4° NB) bijna.
Doe een parallelverschuiving langs deze parallelcirkel van 45° en ga na wat de stand van de Slinger is in Parijs na een heel rondje van 24 uur.

'Als ik het vol had gehouden', schrijft Eco (1996), 'daar uren lang te blijven staan kijken (…) , dan had de Slinger me doen geloven dat het slingervlak in tweeëndertig uur een complete omwenteling had gemaakt en terug was gekeerd naar zijn uitgangspunt (…)'. Klopt dat?

Noten

3 De som van de buitenhoeken is voor elke *n*-hoek 360°. Een *n*-hoek kan in n - 2 driehoeken worden opgesplitst. Som van de binnenhoeken is dus $(n - 2) \times 180°$. Er zijn *n* gestrekte hoeken (van elk 180°). Dus: som buitenhoeken = som gestrekte hoeken minus som binnenhoeken = $n \times 180° - (n - 2) \times 180° = 360°$.

4 Wanneer een gehoekte, gesloten lijn zichzelf snijdt, is de som van de draaihoeken een veelvoud van 360°.

5 Het exces E van een boldriehoek ABC is gedefinieerd als de som van de binnenhoeken $(a + b + c)$ minus 180°. De som van de binnenhoeken van een 'beetje' boldriehoek is altijd groter dan, of gelijk aan, 180°. Maar ook het tekort om 360° rond te komen, is gelijk aan het exces: $360° - [(180° - a) + (180° - b) + (180° - c)] = (a + b + c) - 180° = E$

6 Abelson & diSessa (1979) onderscheiden in hun turtle-meetkunde op de bol daarom twee draaiingen: een turtle-draai die de turtle zelf maakt en een trip-draai die door het bolvlak veroorzaakt wordt.

Stirlinggetallen van de tweede soort

Verwant met de binomiaalcoëfficiënten zijn de Stirlinggetallen, genoemd naar James Stirling (1692-1770). De Stirlinggetallen zijn er in twee soorten. De Stirlinggetallen van de tweede soort worden gedefinieerd als het aantal verdelingen van een verzameling met n elementen in k disjuncte niet lege deelverzamelingen. Ze worden genoteerd als

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Voor de verdeling van een verzameling met 4 elementen $\{a, b, c, d\}$ in 2 niet lege deelverzamelingen vinden we

$a|bcd \quad b|acd \quad c|abd \quad d|abc$
$ab|cd \quad ac|bd \quad ad|bc$

En dus is $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$.

De verdeling in 3 deelverzamelingen levert de volgende mogelijkheden op:

$ab|c|d \quad ac|b|d \quad ad|b|c$
$bc|a|d \quad bd|a|c \quad cd|a|b$

Zodat $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 6$.

De andere Stirlinggetallen voor $n = 4$ zijn:

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1 \text{ en } \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1.$$

De Stirlinggetallen kunnen we net zo als de binomiaalcoëfficiënten in een driehoeksvorm opschrijven.

$n = 1$ … 1
$n = 2$ … 1 1
$n = 3$ … 1 3 1
$n = 4$ … 1 7 6 1
$n = 5$ … 1 15 25 10 1
$n = 6$ … 1 31 90 65 15 1

Driehoek van Stirling voor deelverzamelingen

De getallen in de driehoek van Pascal genereren we door de betrekking

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Voor de driehoek van Stirling bestaat een soortgelijke betrekking

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$$

Bijvoorbeeld

4
×
25 10
65
$65 = 25 + 4 \cdot 10$

3
×
7 6
25
$25 = 7 + 3 \cdot 6$

De betrekking voor de Stirlinggetallen is als volgt in te zien.
We verdelen een verzameling met n elementen in k niet-lege deelverzamelingen. Een bepaald element, zeg a, komt voor als singleton of niet. In het eerste geval moeten we de overige $n-1$ elementen nog in $k-1$ deelverzamelingen verdelen.

Dit aantal is $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$.

Als a niet als singleton voorkomt, dan verdelen we de $n-1$ overige elementen in k deelverzamelingen. Vervolgens voegen we a aan één van deze verzamelingen toe.

Hetgeen $k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ verdelingen geeft.

Rob Bosch

Literatuur

J.H. van Lint, J.W. Nienhuis
Discrete wiskunde

Graham e.a.
Concrete Mathematics

7 In een tweehoek op de eenheidsbol geldt, dat een hoek evenredig is met de helft van de oppervlakte van de tweehoek. Voor de hele bol is de hoek namelijk 360° of 2π, terwijl de boloppervlakte 4π of 720° is. Het oppervlak van de bol is in te delen in drie paar congruente tweehoeken en twee congruente boldriehoeken (zie figuur 13) en daaruit is te vinden dat de oppervlakte van de boldriehoek gelijk is aan de som van de binnenhoeken minus 180°. Dat is ook de definitie van zijn exces. Dus de oppervlakte van de boldriehoek op de eenheidsbol is gelijk aan zijn exces. Is de straal van de bol R dan is zijn oppervlakte gelijk aan: $E \cdot R^2$

8 Hoe dichter bij de pool, hoe meer je zelf moet draaien. Het is als met een zuurbal die in cellofaan is gedraaid, met twee 'pluimpjes' aan weerszijde. Het snoepje toont een verband tussen draaien en oppervlakte.

9 Het is ook uit te rekenen. De betreffende boldriehoek is vrijwel een 90°-90°-90°-boldriehoek.
De totale draaihoek $D = 270°$. Het exces $E = 360° - 270° = 90°$.
De noorderbreedte van de parallelcirkel is 35°. De draaihoek op de parallel is $D' = 360° \times \sin b = 206°$. D' is kleiner dan D. Het exces E' van de cirkel is $360° - D' = 154° \cdot E' > 90° = E$.

bespreking

Een rijk verrijkingsdeel Wiskunde
Analyse en lesvoorbeelden
Jos ter Pelle e.a.
SLO - verkoop
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 305
ISBN: 90 329 1866 4
Prijs *f* 40,–

Het verrijkingsdeel wordt een onderdeel van het examenprogramma vmbo. Het is bedoeld als afsluiting van de theoretische en gemengde leerwegen en moet bijdragen aan de doorstroming naar het vervolgonderwijs.
In deze bundel worden de relevante zaken rond dat verrijkingsdeel uitvoerig besproken en toegelicht. Aantrekkelijk aan deze bundel is dat het grootste deel van de bundel bestaat uit lesvoorbeelden, waarmee een indruk gekregen kan worden hoe zo'n verrijkingsdeel er in de toekomst inhoudelijk uit zou kunnen gaan zien. Een belangrijke bron voor docenten vbo/mavo.

Literatuur

Abelson, Harold & Andrea A. diSessa
Turtle Geometry
The MIT Press, Cambridge Massachusetts, London, England, 1979
(verschillende turtle-meetkundes)

Brink, Jan van den, & Marja Meeder
Bolmeetkundecursus
Fi-APS-produktie, 1997
(voor leraren)

Brink, Jan van den
Bolmeetkunde - Poster en posterboek
Freudenthal instituut, Utrecht, 1997
(meetkunde-onderwijs op de bol: lijsten met vragen en antwoorden)

Brink, Jan van den
Mercator en de centrale projectie
In: Euclides 72-6, p. 240-245, 1997
(functies van kaarten in het meetkundeonderwijs)

Goddijn, A. & D. Siersma
Concrete meetkunde: Veelvlakken
Universiteit van Utrecht, 1997
(abstrahering van de som van draaihoeken)

Lénàrt, Istvan
Non-euclidean adventures on the Lénàrt sphere
Key Curriculum Press, Berkeley, 1996
(tekenen op de bol geeft inzicht)

Deelbaarheid

A.K. van der Vegt

Inleiding

Het is de vraag of men tegenwoordig nog geïnteresseerd in het spelen met getallen. We hebben allemaal onze zakrekenmachientjes (overigens een wonder van de techniek!), die alle antwoorden in een mum van tijd geven. Toch zijn er gelukkig nog leerlingen die belangstelling hebben voor getallen en hun eigenschappen. Eén van die eigenschappen is deelbaarheid. Wellicht kan dit artikeltje helpen om die belangstelling verder te stimuleren.

Eenvoudige regels voor deelbaarheid

De meeste natuurlijke getallen zijn deelbaar, dat wil zeggen ze kunnen ontbonden worden als product van andere natuurlijke getallen. Voorbeelden: $6 = 2 \times 3$, $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ enzovoorts.
Sommige getallen zijn niet deelbaar door kleinere getallen; die noemen we priemgetallen, zoals 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

Hoe kun je nu aan een getal zien of het deelbaar is? Daar zijn de bekende deelbaarheidsregels voor, zoals voor de delers 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 16, 25 enz. In die regels kunnen we, wat de delers betreft, twee soorten onderscheiden:
- delers waarbij we alleen hoeven te kijken naar het laatste groepje van één, twee, drie of meer cijfers van het te onderzoeken getal (zoals bij 2, 4, 5 of 25)
- delers waarbij we alle cijfers van het getal nodig hebben (zoals bij 3, 9 en 11).

Beide categorieën kunnen gemakkelijk geanalyseerd worden. Allereerst moeten we beseffen dat de bekende deelbaarheidscriteria strikt gebonden zijn aan één bepaald talstelsel. Terwijl in het ons vertrouwde tientallig stelsel geldt dat 117.649 niet deelbaar is door 4 omdat 49 geen viervoud is, mogen we die regel niet toepassen als we het getal in het 7-tallig stelsel schrijven als 1.000.000. Dan gelden weer andere regels! We beginnen overigens maar met het gewone tientallig stelsel.

Van getallen naar cijfers

Als een getal N geschreven wordt als $N = \ldots edcba$, betekent dit:
$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + \ldots$
Als N deelbaar is door n, dan geldt dit natuurlijk ook voor getallen die ontstaan door een veelvoud van n bij N op te tellen of af te trekken, zoals $N - p \times n$ of $N - q \times n$ of $N - r \times n$, waarin p, q, r gehele getallen zijn, dus ook:

$N' = a + (10 - p \times n) \times b + (100 - q \times n) \times c + (1000 - r \times n) \times d + \ldots\ldots$ (*vgl.* 1)

Kiezen we $p, q, r, \ldots$ zodanig dat $10 - p \times n$, $100 - q \times n$, $1000 - r \times n, \ldots$ kleine positieve getallen of nul worden, dan krijgen we een deelbaarheidscriterium. Enkele voorbeelden in de eerste categorie:

- Deelbaarheid door 2, dus $n = 2$. We kiezen $p = 5$, $q = 50$, $r = 500$, etc. zodat
  $N' = a + (10 - 5 \times 2) \times b + (100 - 50 \times 2) \times c + (1000 - 500 \times 2) \times d + \ldots = a$
  Dus als a deelbaar is door 2, dan ook $N = \ldots edcba$

- Deelbaarheid door 4, dus $n = 4$. We kiezen $p = 0$, $q = 25$, $r = 250$, etc. zodat: $(10 - 0 \times 4) = 10$, $(100 - 25 \times 4) = 0$, $(1000 - 250 \times 4) = 0, \ldots$
  Nu wordt: $N' = a + 10b + 0 + 0 + \ldots$, geschreven als $N' = ba$. Indien dit getal, gevormd door de laatste cijfers van het getal N, deelbaar is door 4, dan ook het hele getal N.

- Deelbaarheid door 8. Bij $n = 8$ doen we meestal hetzelfde, en komen dan op: als cba deelbaar is door 8, dan ook het hele getal N.

Extra criterium

Maar je zou eigenlijk in deze gevallen nog een extra criterium willen hebben. Want ziet iedereen onmiddellijk dat, bij het getal 29592, het getal 92 een viervoud is, en, erger nog, het getal 592 een achtvoud? Is de keus van p en q daarom wel zo verstandig?
Als je bij $n = 4$ kiest voor $p = 2$ in plaats van $p = 0$,

dan wordt $N' = a + 2b$. Bij het getal 29592 levert dat 20, en dat is gemakkelijker herkenbaar als viervoud.
Als je bij $n = 8$ kiest voor $p = 1$ en $q = 12$, dan wordt $N' = a + 2b + 4c$. Bij het getal 29592 levert dat 40, evident een achtvoud, en als zodanig veel gemakkelijker herkenbaar!
Bij deelbaarheid door 16, 32, 64, …, geldt een soortgelijke aanpak, alleen worden de coëfficiënten van a, b, c, … wat moeilijker te onthouden.

Bij veelvouden van 5, 25, 125 enz. ligt het wat gemakkelijker.
Bij het detecteren van deelbaarheid door 5, dus $n = 5$, kiezen we $p = 2$, $q = 20$, $r = 200$, …
$N' = a + (10 - 2\times5) \times b + (100-20 \times 5) \times c + (1000 - 200 \times 5) \times d + \ldots\ldots = a$
a moet dus 0 of 5 zijn.
Deelbaarheid door 25, dus:
$n = 25$, $p = 0$, $q = 4$, $r = 40$, …
$N' = a + 10b + (100-4 \times 25) \times c + (1000 - 40 \times 25) \times d + \ldots\ldots = a + 10b$,
dus weer het getal gevormd door de laatste twee cijfers; die moeten 00, 25, 50 of 75 zijn.

Alle cijfers gebruiken

We bekijken nu de tweede categorie, waarbij we alle cijfers van het getal nodig hebben. Hierbij is de te onderzoeken deler niet gelijk aan een macht van 2 of 5 (de delers van het grondtal 10). We beginnen met de deler 3. Met $n = 3$ kiezen we in vgl.1:
$p = 3$, $q = 33$, $r = 333$, ... dus:
$N' = a + (10-9) \times b + (100-99) \times c + (1000-999) \times d + \ldots\ldots = a + b + c + d + \ldots$,
ofwel het bekende criterium: als de som der cijfers deelbaar is door drie, dan ook het gehele getal.

Bij deelbaarheid door 9, dus $n = 9$, kiezen we $p = 1$, $q = 11$, $r = 111$, ...
Dat geeft hetzelfde criterium als bij $n = 3$.
Bij beide, 3-vouden en 9-vouden, kunnen we dit noteren als [1], dat wil zeggen we tellen alle cijfers maal één bij elkaar op.

Bij deelbaarheid door 11, dus $n = 11$ kunnen we nu kiezen: $p = 0$, $q = 9$, $r = 90$, … waarmee de coëfficiënten van b, c, d, ... positief zijn:
$N' = a + 10b + c + 10d, \ldots$
Gebruiken we dit criterium voor $N = 1382062$, dan krijg je:
$N' = 2 + 60 + 0 + 20 + 8 + 30 + 1 = 121$, deelbaar door 11.
Maar we kunnen bij $n = 11$ de waarden voor p, q, r, … ook zo kiezen dat we eenvoudige negatieve coëfficiënten krijgen:
$p = 1$, $q = 9$, $r = 91$, $s = 909$, $t = 9091$, …
Dan wordt $N' = a - b + c - d + e - \ldots$
Gebruiken we dit criterium voor $N = 1383062$, dan krijg je:
$N' = 2 - 6 + 0 - 2 + 8 - 3 + 1 = 0$, deelbaar door 11.
De bekende toets voor deelbaarheid door 11 kun je noteren als [-1, 1] of [1, −1].

Deelbaar door 7 en 13

We hebben nu de ons allang bekende deelbaarheidscriteria verklaard en een paar nieuwe (voor machten van 2) ingevoerd. Maar ook deelbaarheid door andere getallen, zoals 7, 13, 17, 19 enzovoorts kan op deze manier onderzocht worden.
Laten we het eens proberen met 7. Kunnen we ook hierbij een hanteerbare uitdrukking vinden voor
$N' = a + (10 - p\times 7) \times b + (100 - q\times7) \times c + (1000 - r\times 7) \times d + (10.000 - s\times 7) \times e + (100.000 - t\times 7) \times f + \ldots$?
Het ligt voor de hand om te kiezen: $p = 1$, $q = 14$, $r = 142$, $s = 1428$, $t = 14.285$, …
$N' = a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f + \ldots$, maar met gebruik van negatieve coëfficiënten is het gemakkelijker om te schrijven:
$N' = a + 3b + 2c - d - 3e - 2f\ldots\ldots$ genoteerd als: [1, 3, 2, −1, −3, −2] met alle mogelijkheden van cyclische verwisseling zoals [2, −1, −3, −2, 1, 3].

Een voorbeeld: Is 864.197.523 deelbaar door 7? We lezen dit getal van rechts naar links, en bepalen:
$3 \times (1) + 2 \times (3) + 5 \times (2) + 7 \times (-1) + 9 \times (-3) + 1 \times (-2) + 4 \times (1) + 6 \times (3) + 8 \times (2) = 3 + 6 + 10 - 7 - 27 - 2 + 4 + 18 + 16 = 21$, dus deelbaar door 7, dus ook het hele getal. Het rijtje [1, 3, 2, −1, −3, −2] is niet eens zo moeilijk te onthouden!

Slot

Ieder die geïnteresseerd is, kan soortgelijke toetsen verzinnen voor deelbaarheid door grotere getallen zoals 13, 17, 19, 23 enz. Bij 13 krijg je het trouwens ook bijna cadeau met [3, 4, 1, −3, −4, −1].

Wiskundige modellen voor seksueel overdraagbare ziektes

Ik vrij veilig of ik vrij niet

Josje Lodder

Inleiding

In de nieuwe vwo-profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek komt het domein Continue Dynamische Modellen voor, waarin onder meer differentiaalvergelijkingen voor de exponentiële en de logistische groei aan de orde komen. Dit artikel laat zien hoe men soortgelijke technieken in kan zetten om het verloop van epidemieën te modelleren.

Het logistische model

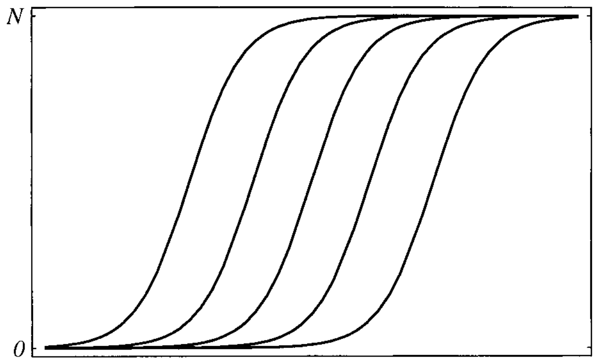
In een populatie van N individuen breekt een besmettelijke ziekte uit. We zoeken wiskundige modellen voor het aantal individuen dat op een bepaald moment t besmet is. In zo'n model stellen we dit aantal voor door een differentieerbare functie $I(t)$ (de letter I komt van *geïnfecteerden*). We zullen voor $I(t)$ een differentiaalvergelijking opstellen. Daartoe bekijken we hoeveel contacten er gedurende een klein tijdsinterval Δt plaats vinden waarbij precies één van beide partners besmet is. Het ligt immers voor de hand om aan te nemen dat de toename ΔI van het aantal besmette individuen gedurende zo'n tijdsinterval ongeveer evenredig is met dit aantal contacten. Verder lijkt het redelijk om te veronderstellen dat dit aantal contacten ongeveer evenredig is met het aantal besmette individuen $I(t)$, het aantal onbesmette individuen $N - I(t)$, en de lengte van het tijdsinterval Δt. In formule:

$$\Delta I \approx r\, I(t)\, (N - I(t))\, \Delta t$$

voor zekere positieve constante r. In ons wiskundige model vervangen we $\Delta I/\Delta t$ door de afgeleide $I'(t) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, en zo komen we tot de differentiaalvergelijking

$$I'(t) = r\, I(t)\, (N - I(t)).$$

Dit is de zogenaamde *logistische differentiaalvergelijking*. Ze kan analytisch worden opgelost; in figuur 1 ziet u de grafiek van enige oplossingskrommen.



figuur 1: Enige oplossingskrommen van de logistische differentiaalvergelijking.

Het is eenvoudig om aan te tonen dat voor al die oplossingen geldt dat

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = N.$$

Met andere woorden: volgens dit model raken op den duur alle individuen besmet. Omdat dit in de meeste gevallen niet klopt met de werkelijke ontwikkelingen, zullen we het model nu gaan aanpassen.

Het model van Kermack en McKendrick

In het bovenstaande model hebben we er geen rekening mee gehouden dat individuen na besmetting beter kunnen worden, immuun kunnen raken of kunnen sterven. We hebben slechts twee soorten individuen onderscheiden: geïnfecteerden en niet-geïnfecteerden. In veel gevallen zullen degenen die besmet zijn geweest immuun raken, of, als de ziekte kwaadaardig is, sterven. In het geval van de ziekte AIDS mogen we aannemen

(of in elk geval hopen!) dat individuen die ontdekt hebben dat ze seropositief zijn, voortaan veilig vrijen of helemaal niet meer, zodat ze in elk geval geen nieuwe individuen meer zullen besmetten. In het model van Kermack en McKendrick worden drie klassen individuen onderscheiden: de vatbaren $V(t)$, de geïnfecteerden $I(t)$ en een restklasse $R(t)$ van individuen die besmet zijn geweest, zelf niet opnieuw besmet kunnen raken en ook geen anderen meer besmetten. Het totale aantal individuen houden we op N, dus op elk tijdstip t geldt:

$$V(t) + I(t) + R(t) = N \qquad (1)$$

Net zoals in het vorige model nemen we aan dat het aantal vatbaren dat per tijdseenheid geïnfecteerd raakt, evenredig is met het aantal contacten tussen vatbaren en geïnfecteerden, dus

$$V'(t) = -\, r\, I(t)\, V(t)$$

voor zekere positieve constante r. We veronderstellen vervolgens dat het aantal geïnfecteerden dat per tijdseenheid in de restklasse $R(t)$ terecht komt, evenredig is met $I(t)$, dus

$$R'(t) = a\, I(t)$$

voor zekere positieve constante a.
Uit (1) volgt dat
$V'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$,
dus $I'(t) = -\, V'(t) - R'(t)$, dat wil zeggen

$$I'(t) = r\, I(t)\, V(t) - a\, I(t).$$

We schrijven deze differentiaalvergelijkingen iets compacter als het stelsel

$$V' = -rIV \qquad (2)$$
$$I' = rIV - aI \qquad (3)$$
$$R' = aI \qquad (4)$$

Dit stelsel kunnen we niet analytisch oplossen, maar we kunnen er toch veel informatie uit halen over het verloop van de epidemie. Een eerste opmerking betreft de beginvoorwaarden, de toestand op $t = 0$, een tijdstip waarop de epidemie nog maar net is uitgebroken. Het aantal geïnfecteerden $I_0 = I(0)$ is dan nog erg klein, het aantal $R_0 = R(0)$ in de restklasse is nul, en het aantal vatbaren $V_0 = V(0)$ is nog vrijwel gelijk aan N.

Limietwaarden

We zien aan vergelijking (4) dat $R(t)$ een niet-dalende functie is, want $I(t)$ kan niet negatief worden. Dit kan overigens ook los van de context bewezen worden door gebruik te maken van een algemene existentie- en uniciteitsstelling voor differentiaalvergelijkingen. Hoe dan ook, omdat het aantal individuen in de restklasse nooit boven de N kan komen, moet de limiet

$$R_\infty = \lim_{t\to\infty} R(t)$$

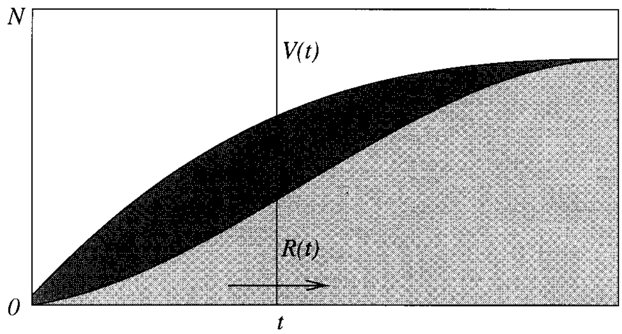
dus bestaan. Evenzo volgt uit (2) dat de niet-negatieve functie $V(t)$ een niet-stijgende functie is, en dus bestaat ook

$$V_\infty = \lim_{t\to\infty} V(t).$$

Samen met (1) betekent dit dat de limiet

$$I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t)$$

eveneens moet bestaan. Het hele systeem zal op den duur dus tot een stabiele eindtoestand naderen. Zou daarbij gelden dat $I_\infty > 0$, dan zou uit (4) volgen dat $R(t)$ naar oneindig gaat, hetgeen niet het geval is. We kunnen dus concluderen dat $I_\infty = 0$, en bijgevolg geldt dat $R_\infty + V_\infty = N$. Figuur 2 geeft de situatie schetsmatig weer.



figuur 2: Een schets van de ontwikkeling van een epidemie. Op den duur gaat het aantal geïnfecteerden $I(t)$ naar nul, terwijl de aantallen $V(t)$ en $R(t)$ naar positieve limietwaarden gaan.

Rest de vraag wat de limietwaarden zijn van $V(t)$ en $R(t)$. Die zullen natuurlijk afhangen van de constanten a en r. Die afhankelijkheid kunnen we direct bepalen aan de hand van de vergelijkingen (2) en (3). Delen we namelijk vergelijking (3) door vergelijking (2), dan krijgen we een differentiaalvergelijking voor de relatie tussen I en V, te weten

$$\frac{dI}{dV} = -1 + \frac{a}{r}\frac{1}{V}$$

Deze vergelijking kunnen we gewoon door integreren oplossen:

$$I = -V + \frac{a}{r} \ln V + c$$

voor zekere integratieconstante c, die we bepalen door $t = 0$ te stellen en te gebruiken dat $I_0 + V_0 = N$. Substitueren we de gevonden waarde, dan krijgen we, als we weer $I = I(t)$ en $V = V(t)$ schrijven:

$$I(t) = N - V(t) - \frac{a}{r} \ln \frac{V_0}{V(t)}$$

Nemen we nu de limiet voor t naar oneindig, dan krijgen we wegens $I_\infty = 0$ een vergelijking waaruit we V_∞ numeriek kunnen oplossen wanneer we de waarden van de parameters kennen:

$$0 = N - V_\infty - \frac{a}{r} \ln \frac{V_0}{V_\infty} \qquad (5)$$

De AIDS-epidemie

Het model van Kermack en McKendrick zal ook weer in veel gevallen een te grote vereenvoudiging zijn van de werkelijke situatie. Toch kan het zinvol gebruikt worden, met name bij het begin van een epidemie wanneer er nog maar weinig gegevens beschikbaar zijn. Met behulp van het model kunnen schattingen gegeven worden voor de parameters, en de resultaten daarvan kunnen richtlijnen geven voor het verzamelen van nieuwe data en het nemen van maatregelen. Wie de literatuur uit de tweede helft van de tachtiger jaren over de ontwikkeling van AIDS raadpleegt, zal het model van Kermack en McKendrick regelmatig tegenkomen. We zullen nu laten zien hoe het onder andere door Anderson e.a. gebruikt is om de waarden van de parameters te schatten.

We beschouwen dus weer het model dat gegeven wordt door de vergelijkingen (2), (3) en (4). In deze context nemen we aan dat de populatie bestaat uit homoseksuele mannen met wisselende contacten.

V is het aantal vatbaren, I het aantal HIV-geïnfecteerden, en R het aantal AIDS-patiënten plus de overledenen.

In het begin van de epidemie is V nog vrijwel gelijk aan N, en dan kan men vergelijking (3) in eerste benadering vervangen door de volgende vergelijking voor exponentiële groei:

$I' = (rN - a)I.$

De oplossing daarvoor is

$$I(t) = I_0 \, e^{(rN - a)t}$$

Deze heeft een verdubbelingstijd

$$t_d = \frac{\ln 2}{(rN - a)}.$$

Uit serologische gegevens blijkt dat deze verdubbelingstijd in het begin van de AIDS-epidemie ongeveer gelijk was aan 8 à 10 maanden, dus als we 1 maand als tijdseenheid nemen, geldt

$$rN - a \approx 0.075$$

Verder weten we uit de gegevens van patiënten die via een bloedtransfusie een HIV-besmetting opliepen, dat de tijd tussen besmetting en het ontstaan van AIDS minstens vier à vijf jaar is. Iemand die niet weet dat hij seropositief is, kan dus vijf jaar of langer anderen besmetten. Van het totaal aantal geïnfecteerden I gaat dus iedere maand ongeveer een zestigste deel of minder over naar de restklasse R. Zo komen we (denk aan differentiaalvergelijking (4)) tot de schatting

$$a \approx 0.016$$

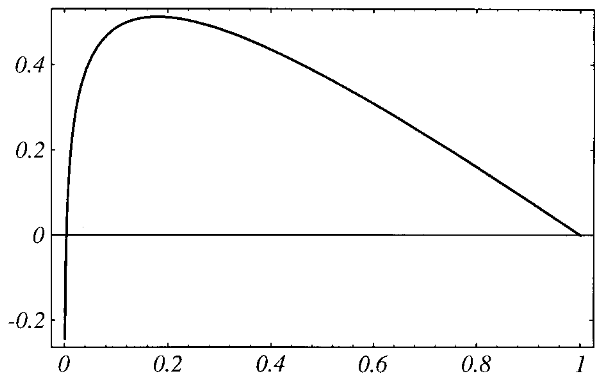
en dus moet

$$rN \approx 0.016 + 0.075 = 0.091$$

zijn. We kunnen nu ook een schatting van de limietwaarden V_∞ en R_∞ geven, of althans van de relatieve aantallen V_∞/N en R_∞/N. Deel daartoe vergelijking (5) door N, en merk op dat $V_0 \approx N$. Dan ontstaat

$$0 = 1 - \frac{V_\infty}{N} + 0.18 \ln \frac{V_\infty}{N}.$$

figuur 3: Een grafiek van de functie $f(x) = 1 - x + 0.18 \ln x$.



Numeriek oplossen van deze vergelijking geeft naast de waarde $V_\infty/N = 1$ die we natuurlijk niet moeten hebben,

$$\frac{V_\infty}{N} = 0.00395$$

(zie figuur 3), hetgeen zou betekenen dat op den duur minder dan 0.4 procent van de populatie besmettingsvrij zou blijven! Gelukkig is dit slechts een model: de effecten van de 'vrij-veiligcampagne' zijn er bijvoorbeeld niet in meegenomen. Maar dit verontrustende getal illustreert wel op overtuigende wijze het nut van

zo'n campagne!

Een model voor de verspreiding van gonorroe

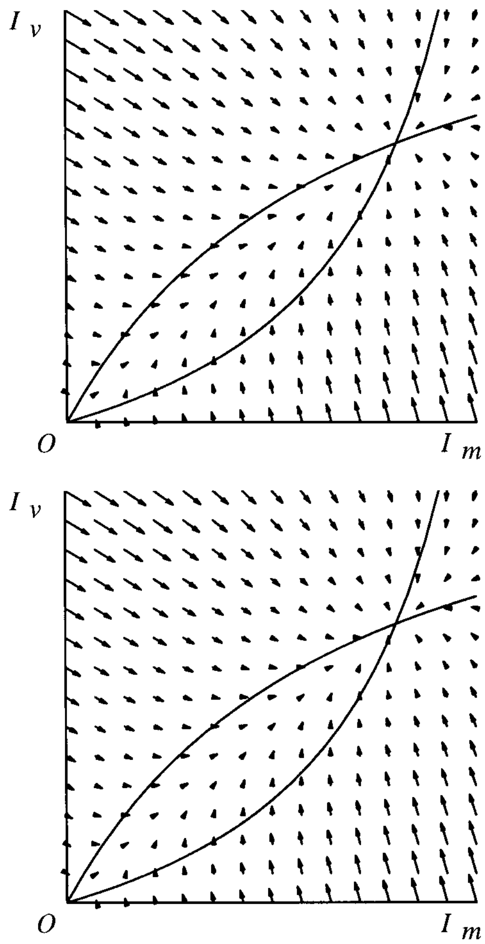
De besmetting van de geslachtsziekte gonorroe vindt vooral plaats via heteroseksueel contact. Het heeft daarom zin om bij een wiskundig model hiervoor de populatie onder te verdelen in mannen en vrouwen. We zullen deze deelpopulaties aangeven met de subscripten *m* en *v*. Bij gonorroe is een genezen individu niet immuun, maar opnieuw vatbaar voor de ziekte. We onderscheiden daarom in elke deelpopulatie slechts vatbare mannen en vrouwen, resp. V_m en V_v, en geïnfecteerde mannen en vrouwen I_m en I_v. Een redenering analoog aan die bij het opstellen van het model van Kermack en McKendrick leidt nu tot een stelsel van vier differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} V_v' &= -r_v I_m V_v + a_v I_v \\ I_v' &= r_v I_m V_v - a_v I_v \\ V_m' &= -r_m I_v V_m + a_m I_m \\ I_m' &= r_m I_v V_m - a_m I_m \end{aligned}$$

De eerste vergelijking zegt bijvoorbeeld dat de toename van het aantal vatbare vrouwen is samengesteld uit twee componenten: een negatieve component die evenredig is met het aantal besmette mannen en het aantal vatbare vrouwen, en een positieve component die evenredig is met het aantal besmette vrouwen. De tweede vergelijking drukt eigenlijk hetzelfde uit, want we nemen in dit model aan dat de totale hoeveelheid vrouwen N_v constant blijft. Evenzo zijn de derde en de vierde de vergelijking in wezen hetzelfde. We hebben dus eigenlijk slechts te maken met een stelsel van twee differentiaalvergelijkingen, namelijk

$$I_v' = r_v I_m (N_v - I_v) - a_v I_v \quad (6)$$
$$I_m' = r_m I_v (N_m - I_m) - a_m I_m \quad (7)$$

We hebben nu alles geformuleerd in termen van de aantallen geïnfecteerde mannen en vrouwen. In feite kunnen we vrijwel alle relevante informatie halen uit een zogenaamd fasediagram in het I_v-I_m-vlak. Dat is net zoiets als het richtingsveld bij een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde. Bij elk paar (I_v, I_m) definieert het stelsel (6), (7) een vector (I_v', I_m') die de richting aangeeft van de oplossingskromme $(I_v(t), I_m(t))$ door dat punt. Zo'n vector stellen we voor door een klein pijltje. We kunnen de grootte van de snelheid ter plaatse aangeven door de lengte van zo'n pijltje evenredig te kiezen met de lengte van die vector. Zie figuur 4 voor twee voorbeelden van zo'n fasediagram.



figuur 4: Fasediagram in de gevallen $N_mN_v - p_mp_v > 0$ (boven) en $N_mN_v - p_mp_v < 0$ (onder).

Evenwichtstoestanden
Wanneer er een evenwichtssituatie optreedt, geldt $(I_v', I_m') = (0, 0)$. De evenwichtstoestanden vinden we dus door in het I_v-I_m-vlak de krommen $I_v' = 0$ en $I_m' = 0$, dat wil zeggen

$$r_v I_m (N_v - I_v) - a_v I_v = 0$$

en

$$r_m I_v (N_m - I_m) - a_m I_m = 0$$

met elkaar te snijden. Het zijn twee hyperbolen die in figuur 4 zijn getekend. Op de ene hyperbool lopen de pijltjes horizontaal, op de andere verticaal. De hyperbolen hebben de vergelijkingen

$$I_m = \frac{a_v I_v}{r_v (N_v - I_v)}$$

en

$$I_m = \frac{r_m N_m I_v}{(r_m I_v + a_m)}.$$

De snijpunten zijn (0, 0) en het punt

$$\left(\frac{N_vN_m - p_vp_m}{p_v + N_m}, \frac{N_vN_m - p_vp_m}{p_m + N_v}\right)$$

waarbij $p_v = a_v / r_v$ en $p_m = a_m / r_m$. Alleen als $N_mN_v - p_mp_v$ positief is, ligt dit tweede snijpunt ook in het eerste kwadrant. Het stelsel heeft dus alleen een tweede positieve evenwichtsoplossing in het geval dat $N_mN_v - p_mp_v > 0$ is. Uit het fasediagram (figuur 4, bovenste figuur) blijkt onmiddellijk dat dit punt dan een stabiel evenwicht is: alle pijltjes wijzen in die richting. De oorsprong is in dat geval een instabiel evenwicht: daar lopen de pijltjes juist weg. De gonorroe-epidemie zal zich in deze situatie dus ontwikkelen naar een stabiele evenwichtstoestand waarin permanent een zeker percentage mannen en vrouwen besmet is. Wanneer daarentegen geldt dat $N_mN_v - p_mp_v < 0$, is juist de oorsprong een stabiel evenwicht (figuur 4, onderste figuur). De epidemie sterft dan uit. Natuurlijk zijn dit soort redeneringen enigszins intuïtief; met wat wiskundige techniek zijn ze echter volledig sluitend te maken.

Het effect van periodieke controles

Met een eenvoudige uitbreiding van het model kunnen we het effect onderzoeken van periodieke controles. Veronderstel dat per jaar van de populaties N_v en N_m respectievelijk een fractie c_v en c_m onderzocht wordt. De onderzochte individuen die besmet blijken, nemen maatregelen waardoor ze snel genezen en geen anderen meer kunnen besmetten. Het model wordt dan

$$I_v' = r_vI_m(N_v - I_v) - a_vI_v - c_vI_v$$
$$I_m' = r_mI_v(N_m - I_m) - a_mI_m - c_mI_m$$

In het vervolg gebruiken we de volgende parameterwaarden:

$N_v = N_m = 100$; $a_v = 4{,}6$; $a_m = 18{,}25$; $r_v = 0{,}15$; $r_m = 0{,}08$.

Hierbij zijn de waarden voor a_v en a_m gebaseerd op een gemiddelde besmettingsduur van 80 dagen voor vrouwen en 20 dagen voor mannen. Dit grote verschil is reëel omdat bij vrouwen de ziekte vaak niet onderkend wordt door het ontbreken van symptomen. Het lijkt daarom een goede strategie om alleen vrouwen periodiek te onderzoeken. Dit wordt bevestigd door het model: zonder periodiek onderzoek ($c_m = c_v = 0$) vinden we als evenwichtsoplossing $(\bar{I}_v, \bar{I}_m) = (23, 9)$. Worden alle vrouwen eens per jaar onderzocht ($c_v = 1$) dan verschuift dit evenwicht naar $(\bar{I}_v, \bar{I}_m) = (11, 5)$, terwijl bij onderzoek van alleen de mannen ($c_m = 1$) het effect veel kleiner is, namelijk $(\bar{I}_v, \bar{I}_m) = (20, 8)$.

Voor praktijkgebruik moeten de hier gepresenteerde modellen natuurlijk verder verfijnd worden. Een mogelijke verfijning is om binnen de populatie verschillende risicogroepen te onderscheiden. De kracht van deze eenvoudige modellen is echter dat met relatief eenvoudige wiskundige hulpmiddelen inzicht verkregen kan worden in het verloop van een epidemie.

Met dank aan Jan van de Craats voor redactionele adviezen en het vervaardigen van de illustraties.

Literatuur

Anderson, R.M.
The Epidemiology of HIV Infection: variabel incubation plus infectoius period and heterogeneity in sexual activity
in: J.R. Statist.Soc. A 151, 66-93, 1988

Braun, M.
Differential equations and their applications
Springer Verlag, 1983

Brown, D. and P. Rothery
Models in Biology: mathematics, statistics and computing
Wiley, 1993

Hethcote, H.W., and J.A. Yorke
Gonorrhea transmission dynamics and control
Lecture notes in Biomaths. 56, Springer 1984

Murray, J.D.
Mathematical biology
Springer Verlag 1989

Drs. J.S. Lodder is verbonden aan de Open Universiteit. Het bovenstaande artikel is gebaseerd op een onderdeel van de OU-cursus Continue Wiskunde 2 die binnenkort zal verschijnen.

Symposium Financiële Wiskunde

Op 11 november organiseert studievereniging Christiaan Huygens (TU Delft, Faculteit Informatie Technologie en Systemen) in samenwerking met het Wiskundig Genootschap de Kaleidoscoopdag. Dit jaarlijkse wiskundesymposium heeft als thema 'Financiële Wiskunde'. Onder de titel 'Geld als Variabele' zal dit interferentie-gebied tussen de wiskunde en de economie vanuit een wiskundige invalshoek worden benaderd.

De volgende sprekers zullen optreden:

Drs. A. den Hartogh, Heijnis en Koelman B.V. (Rotterdam)
'Wiskunde in de verzekeringswereld'

Prof. dr. B.B. van der Genugten, Hoogleraar kansrekening en statistiek aan de Katholieke Universiteit Brabant
'Speltheorie in het Casino'

Workshop: *'Wiskundig gokken'*
Aan echte blackjacktafels kan men proberen om de positieve winstverwachting te verwezenlijken (er wordt niet om echt geld gespeeld).

Dr. ir. J.G. Braker, hoofd Analyse bij Mn Services (Rijswijk)
'Performance als optelsom'

Ir. F. Veger, Deutsche Morgan Grenfell Bank (Londen)
Ir. J.J.J. Potters, Rabobank (Utrecht)
'Wiskunde in de bankwereld'

Voor meer informatie zie homepage:
http://ch.twi.tudelft.nl/commissies/kaleido
Plaats: Senaatzaal (Aula), TU Delft
Datum: 11 november 1998
Kosten: studenten ƒ 10,-
overige deelnemers ƒ 25,-

Verschenen

Zes schoolonderzoeken wiskunde met gebruik van de computer
SLO, Project wiskunde
Postbus 2041, 7500 CA Enschede
Telefoon (053) 4840 339

In het schooljaar 97/98 maakte een groep van docenten met Gerrit van den Heuvel als begeleider een zestal schoolonderzoeksopdrachten voor vbo/mavo met gebruik van de computer. Deze zijn gebundeld in een boekje. Daarbij hoort een schijfje met de bijbehorende bestanden en de tekstbestanden, zodat iedereen het materiaal desgewenst kan aanpassen op de eigen situatie.
De onderwerpen zijn:
- Te laat komen op het IMC
Administratie en gegevensbestanden.
- Grafiek en statistiek
Grafieken en gegevensbestanden analyseren.
- Leerlingenonderzoek
Enquête afnemen en met de computer verwerken.
- Simuleren
Dobbelstenen simuleren met VU-statistiek.
- Leesbaarheid van teksten
Teksten vergelijken.
- Grafieken met als formule
$y = ax^2 + bx + c$
De invloed van de parameters.

Vrijwel alle ontwerpen bevatten een oefendeel en een toetsdeel. Hebt u belangstelling voor deze schoolonderzoeken, neem dan contact op met:
Gerrit van den Heuvel
Zwolseweg 94
7412 AP Deventer
gerrit.hv@wxs.nl

EUCLIDES

Inhoud van de 73e jaargang 1997/1998

Van de bestuurstafel

In deze eerste echte bestuurstafel na de vakantie geef ik u graag een overzicht van 'onderhanden werk'.

Professionalisering(?)
De bijzondere ledenvergadering heeft positief gereageerd op het voorstel van het bestuur om tot een zekere professionalisering te komen via het beschikbaar stellen van tijd aan de leden van het dagelijks bestuur. Helaas is het deze eerste keer niet gelukt om de DB-leden vrij te krijgen voor de tijd die we wilden. De besluitvorming vond (te) laat in het schooljaar plaats en inmiddels waren op de betreffende scholen de vacatures voor wiskunde bekend. We bezien of de situatie per januari verbeterd kan worden; het komend jaar benaderen we de scholen in het vroege voorjaar. Het betekent wel dat we ons activiteitenplan van komend jaar wat zullen moeten bijstellen.

Website
De enige echte NVvW-website wordt op de jaarvergadering feestelijk geopend. Gerard Koolstra heeft vele uren creatieve arbeid gestoken in het ontwerpen van deze site en het resultaat is zeer de moeite waard. Kijk zelf op

http://www.euronet.nl/~nvvw/

We zijn heel blij en trots dat er nog steeds leden, zoals Gerard, bereid zijn zich op zo'n voortreffelijke wijze voor de vereniging in te zetten. Want de vereniging: dat zijn de leden, wij allemaal dus, u ook.

Zebra
De JanBreeman-reeks vordert gestaag. Op onze oproepen hebben we meer reacties gekregen dan we tot nog toe konden verwerken, een luxe-probleem dus. Op de jaarvergadering hopen we u de eerste concrete producten te laten zien van boekjes die kunnen dienen als invulling van de keuzeruimte in de nieuwe vwo-programma's voor de Tweede Fase. We hebben de geheime wens dat deze boekjes ook voor een breder publiek interessant kunnen zijn en zodoende een bijdrage kunnen leveren aan het verbeteren van het imago van ons mooie vak. Om bij een onverhoopt mislukken het financiële risico voor de vereniging te beperken is er inmiddels een aparte stichting Zebra opgericht, bestuurlijk gelieerd aan de vereniging.

Nomenclatuur
De nomenclatuurcommissie heeft haar rapport uitgebracht aan het bestuur, met daarin lijsten van naam- en werkwoorden, die in examens havo en vwo zonder verdere uitleg gebruikt kunnen worden. Dit voorstel is voor commentaar gestuurd naar een aantal leden, die in de enquête aangegeven hadden belangstelling voor dit onderwerp te hebben. Mede op basis van de reacties zal het bestuur een standpunt bepalen en het (eventueel gewijzigde) rapport toesturen naar de CEVO, met het verzoek dit te adopteren. In de nomenclatuurcommissie waren auteurs van wiskundemethoden vertegenwoordigd, zodat er hopelijk ook in de nieuwe leerboeken een zekere eenheid van notatie is.

Hbo
Al enige tijd zijn er gesprekken gaande om docenten wiskunde en statistiek in het hbo een plek binnen de vereniging te geven. Binnen het hbo is er geen vakorganisatie en de behoefte daaraan is groeiende. In januari wordt een symposium georganiseerd, waarna hopelijk een hbo-werkgroep van de vereniging kan worden gevormd. Nadere informatie in een volgend nummer.

Platform VVVO
Binnenkort verschijnt de WIE-IS-WIE gids van het platform, waarin de 23 aangesloten vakverenigingen (waaronder de NVvW) zichzelf positief en eigentijds presenteren.
Dit ter vergroting van de (naams)bekendheid van het platform.
Het platform neemt ook deel in de SBL, de Stichting Beroepskwaliteit Leraren, omdat het ons zeer ongewenst leek als de 'echte' leraar hierin niet vertegenwoordigd was.

Marian Kollenveld

Notulen buitengewone ledenvergadering 10 juni 1998

Notulen van de buitengewone ledenvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, gehouden op 10 juni 1998 te Utrecht.

De voorzitter dr. J. van Lint opent de vergadering en heet de aanwezigen hartelijk welkom. Hij stelt vast dat het aantal aanwezigen niet groot is maar voldoende om met elkaar het voorgestelde te bespreken en vervolgens tot besluitvorming te komen.
Het bestuursvoorstel is vroegtijdig de leden aangeboden in Euclides jaargang 73 nummer 6. De voorzitter geeft een korte uiteenzetting van de wijze waarop het bestuur is gekomen tot de formulering van het voorgestelde. Toename van werkzaamheden heeft het bestuur genoodzaakt tot meer professionalisering.
De voorzitter stelt voor om de bespreking te voeren aan de hand van drie punten:

1 Structuur van het bestuur en aanpassing van het Huishoudelijk Reglement
2 Raad van Toezicht en aanpassing van het Huishoudelijk Reglement
3 Instellen van werkgroepen.

Ad. 1
De vergadering gaat accoord met de instelling van een AB en een DB.
De DB-leden worden voor een jaar benoemd. De vergadering stelt voor om de positie van de DB-leden nauwkeuriger te formuleren met garanties voor de continuïteit. Het bestuur wil niet in de structuurnota een volledige vastlegging van de taken van elk DB-lid afzonderlijk om kleine verschuivingen in taken mogelijk te maken. De benoeming voor een jaar van een DB-lid is uit voorzorg gedaan. Bij onverhoopte vervelende omstandigheden zoals bijvoorbeeld gezondheidsproblemen van een DB-lid zou de NVvW vele jaren met een betaald, maar niet werkend bestuurslid kunnen komen te zitten. De intentie is er uiteraard wel om een goed functionerend DB-lid meerdere jaren DB-lid te laten zijn, zodat er continuïteit in het beleid komt.
In het als bijlage afgedrukte Huishoudelijke Reglement is een en ander reeds verwerkt.
De vergadering doet de suggestie om in een draaiboek de taken te omschrijven, een verdeling van taken te maken, de aftreding te regelen en de honorering te vermelden.
De vergadering kan accoord gaan met dit gedeelte van de nieuwe structuurnota.

Ad. 2
Over de Raad van Toezicht wordt uitvoerig gesproken. In de nieuwe structuur acht het bestuur het van belang dat bij verschillen tussen DB en AB een Raad van Toezicht om een uitspraak gevraagd kan worden.
Voorstellen in de vergadering om de Raad van Toezicht ook bij verschillende andere problemen in te schakelen worden na uitvoerige discussie verworpen.
De vergadering stemt bijna unaniem in met de strekking van de betreffende artikelen in het Huishoudelijk Reglement en mandateert het bestuur om nog enige tekstuele wijzigingen door te voeren.
Een voorstel om artikel 3 van het Huishoudelijk Reglement uit te breiden wordt verworpen.

Ad. 3
De vergadering kan zich in zijn geheel vinden in het instellen van de werkgroepen.
In het draaiboek zullen zowel de communicatie met de redactie van Euclides als de verantwoordelijkheden beschreven moeten worden.
Aangezien het bestuur verantwoordelijk is voor de berichten die naar 'buiten' gaan, zal in elk geval pas na goedkeuring door het AB berichtgeving in Euclides plaats kunnen vinden.
Ter wille van de actualiteit moet er wel voor gezorgd worden dat een en ander tijdig gebeurt.

Na ampele bespreking geven diverse aanwezigen te kennen gelukkig te zijn met de plannen van het bestuur.
De structuurnota is hiermee besproken, waarbij opgemerkt dient te worden dat het stukje over de Raad van Toezicht aangescherpt is, zoals in het nieuwe Huishoudelijke Reglement geformuleerd.

Het Huishoudelijk Reglement zal in Euclides worden gepubliceerd in samenhang met de stukken voor de jaarvergadering. De aanwezigen op de buitengewone ledenvergadering hadden vooraf de reglementen ontvangen.

De voorzitter kondigt aan dat het bestuurslid R. Jongeling in verband met pas nu bekend geworden veranderde schoolwerkzaamheden na de jaarvergadering niet terugkeert in het bestuur.
Het bestuur poogt zo snel mogelijk een nieuwe kandidaat aan u voor te stellen opdat de leden nog in staat zijn voor de jaarvergadering een tegenkandidaat voor te dragen.

Tijdens de rondvraag blijkt dat vele van de aanwezige leden het bestuur feliciteren met de ingeslagen weg.
De voorzitter sluit de vergadering nadat hij allen heeft bedankt voor hun komst en constructieve bijdrage aan de discussie.

W. Kuipers

Huishoudelijk Reglement NVvW

Huishoudelijk Reglement NVvW naar aanleiding van de nieuwe structuur per 1-8-1998.

Versie juni 1998, als vastgesteld tijdens de algemene ledenvergadering op 10 juni 1998.

Alleen de artikelen waarin aanvullingen/wijzigingen zijn aangebracht staan hiernaast vermeld.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

BESTUUR

Artikel 2

Het bestuur bepaalt, met inachtneming van het bepaalde in artikel 8 der statuten, het aantal bestuursleden. Alle bestuursleden tezamen vormen het algemeen bestuur (AB). Twee of drie leden uit het algemeen bestuur vormen het dagelijks bestuur (DB). Het bestuur bepaalt van jaar tot jaar in onderling overleg welke van haar leden het DB zullen vormen. Zij deelt dit tijdig aan de leden mee, in elk geval door middel van een bericht in Euclides.

EUCLIDES

Artikel 15 is vervallen.
Artikel 16 wordt artikel 15.

RAAD VAN TOEZICHT

Artikel 16

Het bestuur stelt een Raad van Toezicht in, die als taak heeft eventueel optredende ernstige problemen tussen het DB en de overige leden van het AB op te lossen.

Artikel 17

De Raad van Toezicht bestaat uit drie leden. Het eerste lid is een erelid of oud-bestuurslid van de vereniging. Het tweede lid is een oud-bestuurslid van de vereniging, of een oud-redactielid van Euclides, of een lid van de vereniging dat minimaal 6 jaar, naar het oordeel van het AB, actief is binnen de vereniging. Het derde lid is iemand die een grote affiniteit heeft met bestuurswerk binnen een vereniging.

Leden van de Raad worden benoemd voor een termijn van maximaal 9 jaar.

De leden van de Raad kunnen zich in bijzondere gevallen laten bijstaan door een persoon met specifieke kennis van de problemen die aan de orde zijn. Deze persoon geeft alleen advies.

Artikel 18

De Raad oordeelt in de eerste plaats in het belang van de vereniging en houdt daarnaast waar mogelijk rekening met persoonlijke belangen en omstandigheden.
De Raad beslist over te nemen maatregelen met gewone meerderheid van stemmen.

Artikel 19

De Raad kan bijeengeroepen worden op schriftelijk verzoek, met opgave van redenen, door minimaal 4 AB-leden.

Indien leden van de vereniging, buiten het bestuur, de mening zijn toegedaan dat er problemen zijn van de soort waarvoor de Raad bijeengeroepen moet worden, dan kunnen zij het bestuur, conform het bepaalde in artikel 11b der statuten, verzoeken een buitengewone algemene vergadering bijeen te roepen. Indien hier minimaal 25 leden aanwezig zijn, zullen de problemen aan de orde komen en kan met een gewone meerderheid van stemmen beslist worden of aan de Raad gevraagd zal worden de problemen te onderzoeken.

Artikel 20

De Raad onderzoekt de gerezen problemen en zoekt een oplossing; de Raad bespreekt de oplossing met het AB en zorgt binnen 2 maanden na dagtekening van het verzoek voor een regeling die moet leiden tot een beëindiging van de problemen. Het AB voert de regeling uit.

Verslag van het verenigingsjaar
1 augustus 1997 - 31 juli 1998

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:

Dr. J. van Lint, voorzitter
W. Kuipers, secretaris
Drs. S. Garst, penningmeester
Mw. drs. M.P. Kollenveld, vice-voorzitter

Overige leden:
Mw. A.F.S. Aukema-Schepel
R.J. Jongeling
P.G.M. Kop
F.J. Mahieu
S.H. Schaafsma
Mw. drs. H.B. Verhage

Veranderingen in het onderwijs gaan niet ongemerkt aan de docenten voorbij. Integendeel, de ontwikkelingen in de eerste en tweede fase vragen op de werkvloer de volle aandacht.
Hoe kunnen we met elkaar op een verantwoorde manier inspelen op al deze ontwikkelingen? De gevraagde actieve rol van de leerling, de zelfstandig werkende leerling vraagt om een adequate begeleiding. De wiskundedocent zal zich met anderen opnieuw moeten bezinnen op didactiek en methodiek.
Het bestuur wist zich eveneens geconfronteerd met de nieuwe ontwikkelingen. Zij weet zich verantwoordelijk voor de ontwikkeling van goed wiskundeonderwijs in ons land. Ze is derhalve voortdurend in gesprek met de achterban om te komen tot verantwoorde adviezen aan allerlei instanties.

Jaarvergadering
Op zaterdag 15 november werd de jaarvergadering gehouden te Bilthoven.
Martin Kindt werd ere-lid nadat de vergadering onder applaus het voorstel van het bestuur overnam.
Zie notulen van de jaarvergadering in Euclides nr. 8, jaargang 73.
De jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag. De studiedag had als thema:
"Veranderingen: b(l)oeiend?!"
Onder leiding van Nellie Verhoef werden de ervaringen van een aantal docenten en leerlingen met het anders omgaan met de leerstof in een groot aantal workshops gepresenteerd.
Prof. dr. D. van Dalen verzorgde een lezing met als titel "Wie wat bewijst die heeft wat".
Bij al de veranderingen moeten we aandacht blijven houden voor het feit dat leren bewijzen al vroeg moet gebeuren. Een herwaardering van het bewijzen, zeker in havo/vwo, is dringende noodzaak. Ook voor vbo/mavo zal het, zij het wat minder "hard", aandacht moeten krijgen.
Aan het eind van de workshops hield Peter van Wijk een lezing met als titel: "Het gebruik van ICT". Op inspirerende wijze liet hij zien op welke wijze we als docenten en leerlingen kunnen inspelen op de nieuwe ontwikkelingen.
Op grond van gehoorde reacties mochten we vaststellen dat het een nuttige dag was geweest.

Nieuwe bestuursstructuur
Het werk van het bestuur neemt steeds meer toe.
In dit verenigingsjaar heeft het bestuur zich langdurig beziggehouden met de opzet van een nieuwe structuur en werkwijze.
Op woensdag 10 juni 1998 is door de algemene ledenvergadering het bestuursvoorstel aanvaard. Zie Euclides nr. 6, jaargang 73 en de artikelen in dit nummer op de voorgaande bladzijden.

Vbo/mavo
Bij de SLO heeft het bestuur een projectaanvraag ingediend die is gericht op onderzoek en materiaalontwikkeling, teneinde het leerwegondersteunend onderwijs te kunnen dienen. Het bestuur geeft hiermee aan oog te hebben voor het wiskundeonderwijs aan de zwakke leerling en de leerling die speciale steun nodig heeft in verband met een tijdelijke problematiek of partiële achterstand.
Het een en ander is gerelateerd aan de wetsvoorstellen leerwegen vbo, mavo, vso, leerwegondersteunend onderwijs en praktijkonderwijs.
De wijze waarop de examinering zal plaatsvinden en de aanpassing van het nieuwe programma hebben de volle aandacht van het bestuur.

Platform VVVO (Vakinhoudelijke Vereniging Voortgezet Onderwijs)
Het bestuur is binnen deze vereniging vertegenwoordigd door mevr. drs. M.P. Kollenveld. Vanuit deze vereniging is zij tevens bestuurslid van het algemeen bestuur van de SLO.
De dwarsverbanden tussen de verenigingen worden steeds duidelijker naarmate de onderwijsontwikkelingen gemeenschappelijke issues presenteren. De samenwerking van de diverse vakinhoudelijke verenigingen krijgen steeds vastere vormen.

Tweede Fase
Het bestuur adviseerde de onderwijsverantwoordelijken om voor C&M vwo het onderdeel "grafen en matrices" op te nemen en niet de "techniek van het differentiëren".
We hebben gepleit voor een voortgezet experiment voor het onderwerp wachtrijen.
Het bestuur doet haar best om de vinger aan de pols te houden in dergelijke ontwikkelingen.
Met betrekking tot het gewicht van de

praktische opdrachten hebben we in een brief aan de staatssecretaris onze zorg uitgesproken over het te grote gewicht. Een veilige experimenteer-omgeving ontbreekt. Het ontwikkelen van een goed instrumentarium voor het beoordelen van zo'n opdracht kost tijd. Het bestuur heeft gepleit voor een groeimodel. De CEVO heeft het bestuur om advies gevraagd omtrent de invoering van de rekenmachine. Zie Euclides nr. 4, jrg 73.

Regionale bijeenkomsten
Regionale bijeenkomsten waren er op 12, 18 en 24 maart te Leiden, Zwolle en Eindhoven. Een plenaire voordracht werd dit jaar gehouden door Kees Hoogland en Douwe Kok met als onderwerp: 'Praktische opdrachten, tussen droom en daad'.
Het aanbod van workshops is elk jaar rijk gevarieerd. Het bestuur probeert in de variatie zoveel mogelijk docenten uit het brede onderwijsveld te betrekken.

Zebra
Het bestuur heeft het initiatief om te komen tot een reeks van boekjes over interessante onderwerpen verder mogen uitwerken. De boekjes worden uitgebracht als de Jan Breemanreeks. Er wordt gedacht aan 5 tot 6 boekjes per jaar. Het bestuur prijst zich gelukkig een aantal auteurs te hebben gevonden die aan de uitwerking willen meewerken.

MTO
Het platform van MTO-docenten heeft als werkgroep van de NVvW veel werk verzet in het belang van de docenten in het MTO.

Examenbesprekingen
De examenbesprekingen vroegen veel zorg en aandacht. Ze werden door een groot aantal docenten bezocht. Het bestuur denkt hiermee in een behoefte te voorzien.

Euclides
Tijdens dit verenigingsjaar nam het bestuur afscheid van Bert Zwaneveld als voorzitter van de redactie. Het bestuur is hem veel dank verschuldigd voor zijn inzet en de wijze waarop hij inhoud wist te geven aan de presentatie van ons blad. Tot zijn opvolger is Victor Schmidt benoemd.

Symbolische rekenmachine
De door het bestuur ingestelde adviescommissie heeft een helder, afgewogen advies gegeven. Het bestuur zal er in haar standpuntbepaling graag gebruik van maken.

Ten slotte
Ook dit verenigingsjaar mocht het bestuur in goed onderling overleg haar werk doen.
Steeds meer wordt duidelijk dat de veranderingen binnen het onderwijs scherpe aandacht vragen om te kunnen voldoen aan de verantwoordelijkheid die het bestuur heeft. Een verantwoordelijkheid naar docenten en leerlingen. Ook dit verenigingsjaar is het belang gebleken van goede contacten met de achterban.

W. Kuipers

Jaarvergadering/studiedag 1998

Herinnering

Jaarvergadering/studiedag 1998

U kunt zich nog opgeven voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Deze wordt gehouden op zaterdag 14 november 1998 te Bilthoven.

Zie voor het volledige programma:

Euclides 74-1 p. 19 en verder,
of:
http://www.euronet.nl/~nvvw/
(*denk om de tilde voor nvvw*)

Ingezonden

Oude kunstjes

Jaren geleden toen de ruimtemeetkunde weer terugkwam in vwo wiskunde B, waren er veel leerlingen die grote moeite hadden met bewijssommen. Lijnen loodrecht op vlakken, vlakken loodrecht op elkaar, dat was vaak lastig in te zien. De leerlingen die van havo-5 instroomden, deden dat met vectoren en hadden die problemen niet.
De makers van die opgaven hadden stereometrie, analytische meetkunde en wat al niet meer gehad, die wisten al wat er uit moest komen, maar de vwo-leerling had al die oude kunstjes niet gehad en zat met de problemen.
Vergelijkingen oplossen is in de basisvorming vernieuwd. We werken nu met robots, rekenmachientjes en wat dies meer zij. Een terugrekenmachientje maken en de vergelijking is al bijna opgelost.
Tot een vergelijking zoals
$2x + 3 = 5x - 8$
opduikt, dan wordt weer het oude kunstje van de weegschaal te voorschijn gehaald. Zo hebben opgavenmakers, leerplanontwikkelaars en leraren dat gehad.
Maar waarom weer dat oude kunstje? We hebben nu toch een nieuw: als twee dingen aan elkaar gelijk zijn dan is hun verschil altijd nul. Dus wordt de vergelijking
$2x + 3 - (5x - 8) = 0$,
haakjes wegwerken, vereenvoudigen en pak het machientje maar weer!
Ik heb nog geen boek gezien waar niet de weegschaal of iets dergelijks te voorschijn gehaald wordt. Vastgeroeste gewoonte?

We krijgen straks (voor sommigen al nu) weer 'nieuwe' wiskunde in de Tweede Fase.
Willen de opgavenmakers er om denken dat de leerling niet de wiskunde heeft gehad die zij wel genoten hebben, en dat die leerling dus niet die oude kunstjes kent, die zij wel in het achterhoofd hebben!

Pieter de Roest

Advertentie
Hewlett Packard

uit Euclides 74-1
omslag pag. III

bespreking

A. Mizrahi / M. Sullivan
Mathematics, an applied approach
John Wiley & Sons
ISBN 0-471-10701-8
906 blz.

De eerste editie van dit leerboek werd in 1976 gepubliceerd onder de titel MATHEMATICS for Business, Life Sciences and Social Sciences. Tot en met de vijfde editie is dat ook de titel gebleven. In de huidige, zesde editie is de titel gewijzigd. Als argument voeren de schrijvers aan dat het behandelen van de wiskunde vanuit de toepassingen steeds het belangrijkste doel is geweest en dat de verzameling behandelde toepassingen inmiddels is uitgebreid tot buiten de genoemde wetenschapsgebieden.
Ondanks het feit dat de tekst op diverse plaatsen is herschreven blijven de twee uitgaven veel op elkaar lijken. Het boek is nu opgedeeld in drie delen: Lineaire Algebra, Waarschijnlijkheidsrekening en Calculus. Elk deel bestaat uit een aantal hoofdstukken, die ook bijna allemaal in de vorige editie voorkwamen, hier en daar in een andere volgorde. En hoewel in het voorwoord wordt aangekondigd dat het aantal voorbeelden fors is uitgebreid, moeten we daar niet te veel van verwachten.
Wat blijft is een goed leerboek. Niet zozeer vanuit toepassingen, maar meer aan de hand van voorbeelden, wordt de stof aan de lezer uitgelegd. Het tempo is door de grote hoeveelheid voorbeelden niet hoog en ook de uitgebreide opgavensets helpen bij het eigen maken van de theorie en het ontwikkelen van vaardigheden. Door elk hoofdstuk aan het eind te voorzien van een Chapter Review is alles ook redelijk eenvoudig terug te vinden.
Om een idee te geven van het niveau van de stof: matrixrekening gaat niet verder dan de inverse van een matrix, maar er is ruim aandacht voor de Simplexmethode voor lineair programmeren.
Het deel over waarschijnlijkheidsrekening behandelt alleen de binomiale en de (standaard-)normale verdeling, maar er is ook een hoofdstuk over Markov-ketens. In het calculus-deel komen we geen bewijzen tegen, maar in het hoofdstuk over functies van meer variabelen is er wel een paragraaf over Lagrange multiplicatoren. Al met al richt het boek zich dus meer op de cursist die een aantal wiskundige technieken moet leren beheersen dan op de student die ook iets van de achtergronden van de theorie moet weten.
Echt nieuw in deze uitgave zijn de Technology Exercises. Bij het oplossen van deze opgaven wordt de lezer geacht een grafische rekenmachine of grafische software bij de hand te hebben. De opdrachten variëren van eenvoudige illustraties van de behandelde theorie tot lastiger vraagstukken, die zonder deze hulpmiddelen wel erg moeilijk worden.
Het boek wordt afgesloten met een aantal appendices. Appendix A behandelt een aantal elementaire begrippen uit de algebra en de meetkunde; appendix B beschrijft het programma LINDO, waarmee lineair programmeren problemen kunnen worden opgelost. Verder is er een drietal tabellen en een paragraaf met antwoorden bij alle oneven genummerde opgaven.

Harm Bakker

Fatima High School

Zimbabwe en het Wereldwiskunde Fonds

Ger Limpens en
Gerben van Lent

Wereld-
wiskunde
Fonds

Inleiding

"To date Z$ 16 000,- has been spent, mostly on form 1-4 books. The A-level books are on order. Thick plastic will be purchased to cover the books. Labels will be stuck inside to indicate the donors and a place where students can write their names."
(citaat uit een brief van Sister Helen Doyle, Fatima High School in Matabisa, Zimbabwe)

Zoals u ziet, komt de donatie van het Wereldwiskunde Fonds van de NVvW goed van pas. In 1997 is Zimbabwe, om precies te zijn voornoemde Fatima High School, gekozen als ondersteuningsproject.
In onderstaand artikel proberen we de lezer van Euclides enig zicht te geven op het wiskundeonderwijs in een Derdewereldland als Zimbabwe. Verder treft u in dit artikel foto's aan die gemaakt zijn op Fatima High School.

Toetsing in Zimbabwe

Het middelbaar onderwijs op Fatima High School leidt gedurende 6 jaar op voor het afleggen van een Advanced Level-examen. Ook in Zimbabwe worden leerlingen gedurende deze opleidingsperiode van 6 jaar regelmatig getoetst. Men kent onder andere de volgende soorten toetsen:

* Form One to Six: Mid-year exams
* Zimbabwe Junior Certificate Paper I en II (eind van klas 2)
* Ordinary Level Maths Paper I en II (eind van klas 4)
* Advanced Level Maths Paper I en II (eind van klas 6)

De eerstgenoemde toetsing bestaat uit zogenaamde interne toetsen die gemaakt worden door docenten van de school zelf. In klas 2, 4 en 6 hebben deze toetsen de vorm van de officiële externe examens in dat leerjaar.
De tweede wordt samengesteld door een overkoepelende Zimbabwaanse examencommissie, de Zimsec. Deze Zimsec werkt ook mee aan de totstandkoming van de Ordinary Level Maths Papers I en II, in samenwerking met de Universiteit van Cambridge. Het laatste examen wordt in zijn geheel opgesteld door Cambridge. Het is vergelijkbaar met het Engelse A-level examen.
Hieronder volgen enkele voorbeelden uit die toetsen.

Zimbabwe Junior Certificate Maths mid years

I. P is the set of alle multiples of 5 and Q is the set of all whole numbers greater than 21 but less than 35. The elements of $P \cap Q$ are:

A. 20 and 25 B. 20 and 35 C. 25 and 30 D. 25 and 35 E. 30 and 35

II. 1st stone



The diagram above shows 5 stones placed 10 metres apart in a straight line on the ground. Starting from the first stone, the distance Tendai covers in bringing the other stones one by one to the first stone is

A. 60 m B. 80 m C. 100 m D. 120 m E. 200 m

Form One Mid Year exams

I. Solve the following equations:

a $3x = 21$
b $x - 6 = 8$
c $3x + 4 = 16$
d $\frac{3}{4}x = \frac{2}{5}$

II.

a Find the H.C.F. of 108 and 240
b Find the L.C.M. of 12, 18 and 24
c Find the smallest sum of the money that is an exact multiple of $1,12 ; 64c and 96c

Zimbabwe Junior Certificate Examination

I. Solve the following equations:

(i) $3a - (4a + 7) = -3$

(ii) $\frac{(5 - x)}{2} = \frac{(3x - 4)}{5}$

II. Answer the whole of this question on a sheet of graph paper.

A motorist set off at 0.9.30 on a journey from Harare to Bulawayo, a distance of 440 km. On the first part of the journey, he travelled at 100 km/h. After 2 hours he had a puncture which took him 1 hour to mend. He then resumed his journey and arrived in Bulawayo 2 hours later.

a Using a scale of 2 cm to represent 1 hour on the horizontal axis and 2 cm to represent 50 km on the vertical axis, draw the graph of his journey.
b Use your graph to answer the following questions.
  (i) At what speed did he travel during the last 2 hours of his journey?
  (ii) How far from Harare was he at 1048?
  (iii) How far from Bulawayo was he at 1400?

Ordinary Level Maths

I The premium of a certain insurance policy is calculated using the formula

$$Q = \frac{(M - F) \times 10000}{R}$$

where $\$Q$ is the sum assured,
$\$M$ is the monthly premium
$\$F$ is the policy fee and
R is a factor obtained from the insurance tables.
Given that $Q = 50\,000$, $F = 20$ and $R = 45$, find the value of M.

II In a class of 40 pupils, 24 study mathematics, 18 study geography and 11 study neither of these subjects.
A pupil is chosen at random.
Find the probability that the pupil studies geography but not mathematics.

Advanced Level Maths

I A random sample of size 1000 was selected from the persons listed in a residential telephone directory of a city in England. The number of letters in each surname was counted and the distribution of the length of surnames is given in the table below.

Length of surname	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frequency	8	63	207	247	220	128	75	37	12	3

(i) Represent this distribution by a frequency polygon
(ii) Find the median and the interquartile range of the length of the surnames shown in the table
(iii) Calculate the mean length of the surnames shown in the table.
(iv) State with a reason whether the people in this sample are likely to be representative of all the people in the city

II After extensive testing, it was found that the lifetimes of Osric light bulbs had a mean of 2408 hours and a standard deviation of 101 hours. Assuming that the lifetime of a bulb is modelled by a normal distribution, find
(i) the probality that an Osric light bulb will have a lifetime of more than 2600 hours,
(ii) the percentage of bulbs having a lifetime of between 2200 hours and 2500 hours
(iii) the lifetime, correct to the nearest hour, exceeded by 5% of bulbs.

Leerlingen van Fatima High aan het woord

Naar aanleiding van de ondersteuning door het WF lieten verschillende leerlingen van Fatima High School hun licht schijnen over het vak wiskunde. In het onderstaande vindt u enkele passages uit hun opstellen:
Memory Chuma (leerling uit klas 1) schrijft:

'Wiskunde is een erg interessant vak, het gaat allemaal over getallen. Wiskunde is een erg belangrijk vak omdat, als je voor wiskunde zakt, het erg moeilijk voor iemand zal zijn een baan te krijgen. Als je echter voor wiskunde slaagt en zakt voor andere vakken, dan kan je nog wel een baan vinden. Als je een baan wil, moet je weten hoe je moet optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen. (…)'

Tatenda Sibanda uit de derde klas laat weten:
'Ik denk dat wiskunde een erg interessant vak is, zeker als de leraar actief is. Voor wiskunde heb je echte aandacht nodig en zeer actieve mensen. (…) Het is erg eenvoudig om te begrijpen als men zich echt concentreert. Volgens mij heb je voor wiskunde erg snelle denkers en scherpe geesten nodig. Wiskunde wordt moeilijk als men een bepaald onderwerp gemist heeft omdat bijna alle onderwerpen onderling samenhangen.(…) Boven alles is wiskunde erg eenvoudig en interessant als men tenminste een positieve instelling heeft.(…)'



En *Faith Nkomo*, eveneens uit de derde klas, geeft een korte historische schets:
'Wiskunde is een vak dat voor het eerst voorkwam in Griekenland en Italië. Het werd gebruikt bij het bouwen van de piramides en één van de zeven wereldwonderen. Wiskunde werd verspreid door priesters en blanken die naar Zimbabwe kwamen. (…)'

Tony Mudanki, derde klas, meldt het volgende:
'Het wiskundeprogramma voor 'Ordinary Level'-leerlingen is eenvoudig omdat enkele leerlingen zelfs Additional Maths volgen. Dit is ingewikkelder dan General Maths. Als een leerling Additional Maths doet, dan slaagt hij vast en zeker voor General Maths. Leerlingen die General Maths moei-

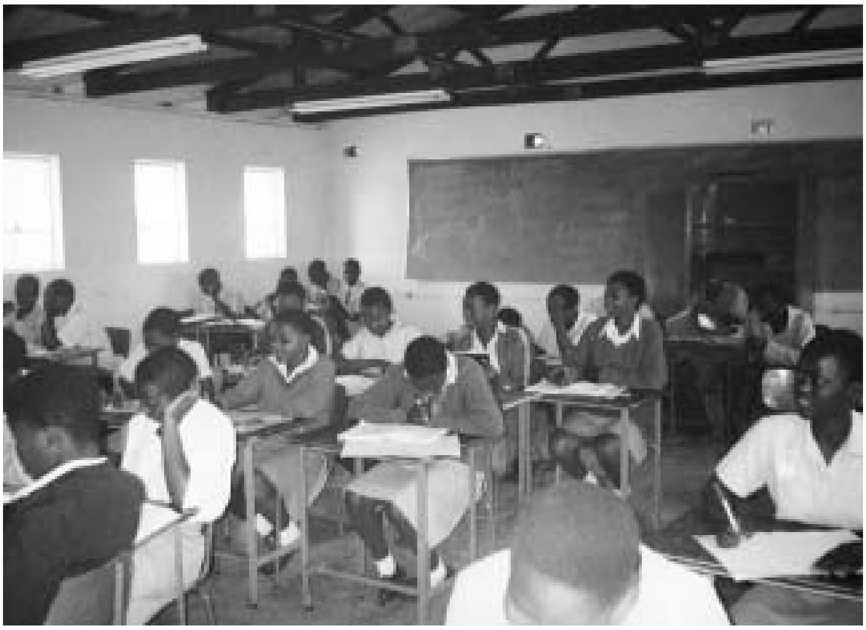


lijk vinden, doen dan maar Scientific Maths. Dit is volgens mij het eenvoudigst. (…) Als je in Zimbabwe voor wiskunde slaagt, dan moet je daar trots op zijn.'
Milkar Mtingwende en *Brenda Nkwate*, uit een wiskundegroep op Advanced Level, schrijven:
'(…) Toen we met wiskunde begonnen op A-niveau, was onze houding positief maar later werd deze minder door een stijgende moeilijkheidsgraad toen er meer onderwerpen behandeld werden. Natuurlijk werd onze houding niet verbeterd door de schaarste van lesboeken. Tegen het einde van het eerste cursusjaar verbeterde onze leshouding weer. Dit was een gevolg van een stijgende bekendheid met de eisen van het vak. (…)'

Reacties van een Zimbabwaanse docent

Een van de wiskundeleraren van Fatima High School, Mr. K. Nkiwane schrijft het volgende over het wiskundeonderwijs in Zimbabwe:

Over het Programma Zimbabwe Junior Certificate (Z.J.C.) en Ordinary Level (O-level):
'De te behandelen stof is te lang om binnen twee jaar te behandelen. Vanwege onder andere een te vol rooster hebben leerlingen niet voldoende voorbereidingstijd voor hun huiswerk en groepswerk waardoor ze altijd aan verschillende verplichtingen tegelijkertijd te voldoen hebben. De tweede periode van het leerjaar is bovendien gesplitst in twee delen, waarvan twee maanden voor



onderwijs bestemd zijn en een maand voor toets- en correctiewerk. Tevens staan er enkele moeilijke onderwerpen op het programma zoals gelijksoortige en congruente driehoeken en meetkundige constructies in "Z.J.C". Voor O-level staan onderwerpen als kansrekening, meetkundige transformaties, lineair programmeren en logaritmen op het programma. Ook deze onderwerpen zijn voor de leerlingen tijdrovend en verwarrend.'

Over de klassegrootte:
'De verhouding leraar-leerling is in de laatste jaren geëscaleerd. Vandaag de dag staat 1 docent voor 45 leerlingen en in sommige gevallen zelfs voor 55 leerlingen. Natuurlijk wordt een leraar daardoor overbelast, want een weektaak van een docent bevat 36 tot 42 leseenheden, waardoor hij 6 tot 7 verschillende klassen onder zijn hoede heeft. Het grote aantal leerlingen per klas maakt het ook onmogelijk om bepaalde didactische vormen te hanteren, zoals groepswerk. Bovendien is er te weinig ruimte in de lokalen om bepaalde werkvormen te hanteren of audio-visuele hulpmiddelen te gebruiken.
Omdat bovendien sommige leerkrachten meer dan een vak doceren hebben deze vaak ook niet de tijd zich in een vak te verdiepen ter voorbereiding voor hun lessen.'

Over de klaslokalen en lesmaterialen: *'Er is een tekort aan klaslokalen. Zodoende zijn er geen echte wiskundevaklokalen die het mogelijk kunnen maken wiskundige spelletjes te bedrijven in combinatie met lesactiviteiten. Omdat verschillende vakken gebruik maken van hetzelfde lokaal is het dus tevens onmogelijk wiskundige posters e.d. op te hangen, ook onder andere vanwege leerlingvandalisme.*
Er is een tekort aan lesmateriaal en soms zijn leerkrachten gedwongen dit zelf aan te schaffen.'

Tot slot

Uit het verslag van Mr. Nkiwane blijkt dat de problemen waar het onderwijs in een Derdewereldland mee te kampen heeft, vaak van een andere orde zijn dan die van het Nederlandse onderwijsbestel. Toch zien we, ook in de verslagen van leerlingen, nogal wat raakvlakken met het Nederlandse wiskundeonderwijs. Onderwerpen als motivatie en moeilijkheidsgraad spelen ook binnen onze klaslokalen een grote rol. In haar schrijven aan het Wereldwiskunde Fonds meldt Sister Helen Doyle dat onze Zimbabwaanse collega's volgend jaar zullen proberen een video-opname samen te stellen waarbij zowel Fatima High School in het algemeen als de wiskundelessen aldaar in het bijzonder aan de orde komen. Mocht deze videoband inderdaad tot stand komen, dan zal de werkgroep Wereldwiskunde Fonds u tijdens de jaarvergadering van de NVvW in de gelegenheid proberen te stellen deze te bekijken. In ieder geval zult u het Wereldwiskunde Fonds op de jaarvergadering in Bilthoven weer met een informatiestand aantreffen. Tevens zullen we alle leden dan weer in staat stellen hun oude/gebruikte wiskundeboeken te verkopen, uiteraard met de bedoeling het Wereldwiskunde Fonds mee te laten delen in de opbrengst van de verkoop.

40 jaar geleden

1121 [1])

a Los op: $8^{2x+1} = 8^x + 2^{-2}$.

b Los op: $8^{2x+1} < 8^x + 2^{-2}$.

c Los op: $8^{2x+1} > 2^{3x+5} - 8^2$.

1122 [1])

Los op het stelsel vergelijkingen:

$2 + ({}^7\log x - {}^7\log y) \cdot {}^2\log 7 = {}^7\log 12 \cdot {}^2\log 7$

$28(x - y)^{-2} = 1 + 12(x - y)^{-1}$.

1125 [1])

Van een vierkant *ABCM* is de zijde *p*. Van een rechte cirkelkegel is *T* de top; de grondcirkel ligt in hetzelfde vlak als het vierkant *ABCM*; *M* is het middelpunt van de grondcirkel, *p* de straal; de hoogte van de kegel is ook *p*. *P* is het midden van *TA*, *Q* is het midden van *TC*.
Zowel in *P* als in *Q* trekt men een raaklijn aan de kegel, zó dat deze raaklijnen elkaar snijden; het snijpunt noemt men *S*.
a Bewijs, dat *S* op de lijn *TB* ligt.
b Bewijs, dat *M*, *A*, *B*, *C*, *P* en *Q* op één boloppervlak liggen; bepaal nauwkeurig de plaats van het middelpunt van deze bol en druk de straal ervan in *p* uit.
c Druk de afstand van *T* tot het van *B* verschillende snijpunt van *TB* met de bol in *p* uit.

1 Eindexamen H.B.S.-B, 1958.

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 46 (1958-1959)

Werkblad

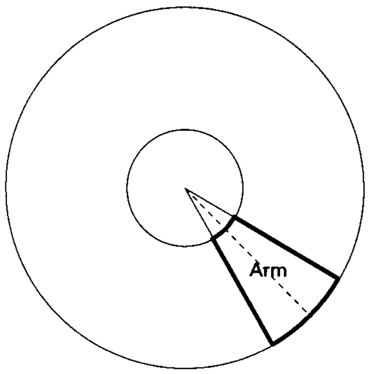
De tweede Heinenoordtunnel

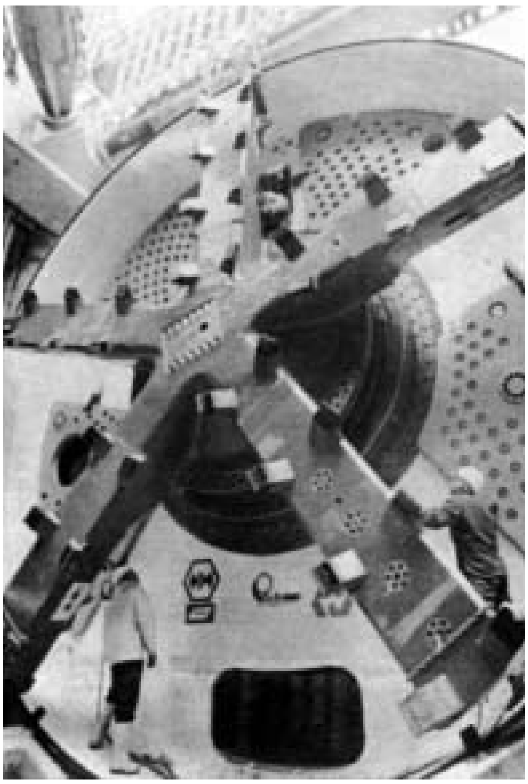
In Barendrecht is naast de Heinenoordtunnel een tweede tunnel voor langzaam verkeer (tractoren en fietsers) geboord.
Je ziet hieronder een foto van het snijrad, dat bij de boring gebruikt is.

14 Schat de diameter van het snijrad.
Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Hiernaast is bij vraag 15 een vereenvoudigde tekening gemaakt van het rad.
Er is 1 arm al getekend.

15 Teken de 4 ontbrekende armen. Het snijrad is draaisymmetrisch.
Schrijf ook op wat je daarbij berekend hebt.



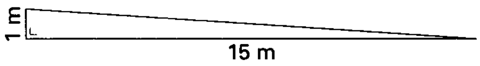


Werkblad

De tunnel bestaat uit 2 aparte buizen, één voor tractoren en één voor fietsers, van elk 950 m lengte.
De boorsnelheid was 10 m per 24 uur. Het boren begon in week 3 van 1997. Op zaterdag en zondag werd er niet gewerkt.

16 Laat met een berekening zien of het boren in 1997 klaar was.

De weg voor tractoren naar de tunnel heeft een helling zoals hieronder getekend is.

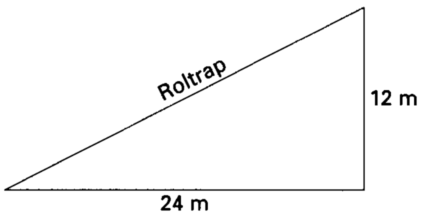


Het hellingspercentage is te berekenen met de formule:

$$\textbf{hellingspercentage} = \frac{\textbf{verticale afstand}}{\textbf{horizontale afstand}} \times \textbf{100\%}$$

17 Bereken het hellingspercentage van deze helling (afronden op 1 decimaal).

De roltrap voor de fietsers heeft een hoogte van 12 m en een horizontale afstand van 24 m.



18 Hoe groot is de hellingshoek van deze roltrap?

19 Bereken in meters nauwkeurig de lengte van de roltrap.



Uit: Examen vbo Wiskunde B 1998

Recreatie

Opgave 688

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

In recreatie 652 liet ik u kennismaken met een nieuw type puzzel: het NONOGRAM, afkomstig uit Japan. Intussen is er in The Sunday Telegraph al meer dan 400 keer een 'Prize Nonogram' verschenen. Deze zijn gebundeld in vier boekjes: 'The Sunday Telegraph Book of Nonograms 1, 2, 3 & 4'.
In Nederland verscheen in juni 1998 'Japanse Puzzels' van de firma Puzzelsport.

Opnieuw laat ik u proeven aan een nieuw type puzzel uit Japan. Er zijn in Japan al verschillende boekjes met opgaven verschenen. De bedoeling is om onder bepaalde voorwaarden getallen te plaatsen, vandaar de Engelse naam NUMBER PLACE.
Begin 1998 verscheen al deel 5 in een serie puzzelboekjes van Gakken Mook.

7				4				5
			5		9			
		9				1		
4			3		6			7
	2			8			5	
8			2		4			1
		6				4		
			6		2			
5				7				6



In het 9 × 9 vierkant staan in de oplossing op elke horizontale rij alle getallen 1 tot en met 9. Dit geldt ook voor elke verticale kolom. In elk van de negen vet omkaderde vierkantjes van 3 × 3 geldt dat alle getallen 1 tot en met 9 erin voorkomen.
Door redeneren en proberen is het mogelijk de opengelaten vakjes in te vullen, waardoor de unieke oplossing gevonden wordt.
Heel veel succes!

Als u de oplossing vindt en binnen een maand instuurt, dan ontvangt u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.
Hiermee kunt u altijd starten, bijvoorbeeld nu!

Oplossing 685

Heel veel dank voor uw reacties betreffende de Romeinse cijfers in ‘vraagpunt 3’ van *Hessel Pot* (20 punten), Woerden.
Leo H. van den Raadt (47 punten), Heemstede en *Jacques Haubrich* (5 punten), Eindhoven formuleerden de regels kort en bondig:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM

Het jaartal 1999 is ‘dus’ MCMXCIX.
Velen meenden echter dat de kortste schrijfwijze de beste was!

De oplossingen van opgave DCLXXXV worden dan:

I $15 \times 20 = 300$ en $\text{XV} \times \text{XX} = \text{CCC}$
$11 \times 55 = 605$ en $\text{XI} \times \text{LV} = \text{DCV}$

II $\left(\frac{410}{205}\right)^5 = \frac{160}{5}$ en $\left(\frac{\text{CDX}}{\text{CCV}}\right)^{\text{v}} = \frac{\text{CLX}}{\text{V}}$

Ernst Grootveld (30 punten), Wateringen vroeg zich tijdens de verkiezingen af of

$$\left(\frac{\text{XXM}}{\mathbf{VVD}}\right)^{\text{v}} = \frac{\text{CLX}}{\text{V}}$$

ook mocht.

III De bedoelde unieke oplossing was:
$102 - 90 = 60:5$ en $\text{CII} - \text{XC} = \text{LX}:\text{V}$
Helaas had ik zelf niet het geval $= \ldots : \text{I}$ bekeken.
Daardoor zijn er nog 8 oplossingen:

CII − LI = LI : I	CXI − LI = LX : I
CVI − LV = LI : I	CXV − LV = LX : I
CXI − LX = LI : I	CXX − LX = LX : I
CVI − LI = LV : I	
CXV − LX = LV : I	

Uiteraard heb ik ook andere (aanvaardbare) oplossingen goed gerekend!

Tot slot nog twee extra puzzels:
- Wat heeft 54 te maken met de voornaam van een bekend actrice ?
- En 501 met een prinses ?

[Uiteraard met LIV Ullmann en met Lady DI]

Met 68 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Elias Buissant des Amorie
Molenweide 51
1902 CJ Castricum

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
3	26-11-98	15-10-98
4	07-01-99	19-11-98
5	18-02-99	07-01-99
6	01-04-99	18-02-99
7	17-05-99	01-04-99
8	24-06-99	13-05-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft voor het nieuwe schooljaar deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

---

Panama-conferentie
wo. 4, do. 5 en vr. 6 november 1998
Reken-/Wiskundeonderwijs
Freudenthal instituut: 030 2611 611

Symposium Financiële Wiskunde
wo. 11 november 1998
TU Delft
http://ch.twi.tudelft.nl/commissies/kaleido

Jaarvergadering en studiedag NVvW
za. 14 november 1998
Tweede aankondiging zie blz.19 van het vorige nummer van Euclides

---

Wiskunde A-lympiade
vr. 20 november 1998 !
Freudenthal instituut: 030 2611 611
Aankondiging blz. 32 in het vorige nummer van Euclides

5e Mathematische Modelleercompetitie Maastricht
za. 23 januari 1999
Universiteit Maastricht
tel.: 043-3883834
Aankondiging volgt nog

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 5 en za. 6 februari 1999
Freudenthal instituut: 030 2611 611
Aankondiging volgt later

Examendata
vbo/mavo C/D:
di. 18 mei 1999
havo wiskunde A:
ma. 17 mei 1999
havo wiskunde B:
wo. 26 mei 1999
vwo wiskunde A:
do. 27 mei 1999
vwo wiskunde B:
do. 20 mei 1999

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW-website
Op de komende jaarvergadering zal de officiële NVvW-website ten doop worden gehouden, boordevol interessante informatie voor wiskundedocenten.
U kunt alvast een kijkje nemen:
www.euronet.nl/~nvvw/

NVvW e-mail
De NVvW beschikt al enige tijd over een e-mail adres:
NVvW@euronet.nl

WiskundE-brief
Docenten kunnen zich nog steeds aanmelden voor het e-mail-netwerk: WiskundE-brief.
Per e-mail wordt u dan op de hoogte gehouden van nieuws, reacties commentaren, etc.
Aanmelden bij:
Andriess@concepts.nl of GerardK@xs4all.nl

Nog wat sites:

Getal en Ruimte
www.getalenruimte.nl

Netwerk
www.wolters.nl

Wageningse methode
www.wageningse-methode.nl

Nationale Wiskunde Dagen 1999
www.fi.uu.nl/nwd

Centrum Vrouwen en Exacte Vakken
ns1.svm.nl/VeEX/

Pythagoras
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Adv.
Texas Instruments
uit 73/8

indien niet maar aanwezig:

rechtstreeks uit

oude nummer overnemen.

Hopelijk is moïré te vermijden.

Wolters-Noordhoff biedt u de keuze

Moderne wiskunde 7e editie
Netwerk 2e editie

Beschikbaar voor het schooljaar 1998/1999

Tweede Fase havo en vwo

	Moderne wiskunde 7e ed.		Netwerk 2e ed.		Domein
	Reeds verschenen:				
havo	A1 en B1 deel 1*		A1 en B1 deel 1*		Veranderingen, Tellen en Kansen
	A1 deel 2*		A1 deel 2*		Verbanden, Statistiek
	B1 deel 2*		B1 deel 2*		Toegepaste analyse 1, Ruimtemeetkunde 1
vwo	A1 en B1 deel 1*		A1 en B1 deel 1*		Functies en grafieken, Discrete analyse
	Zojuist verschenen:				
vwo	A1 en B1 deel 2		A1 en B1 deel 2		Combinatoriek en kansrekening
	A2 deel 1/B1 deel 3		A2 deel 1/B1 deel 3		Meetkunde
	Binnenkort verschijnt:				
havo	A2	okt. 98	A2	okt. 98	Toegepaste analyse, Binomiale verdeling
	B1 deel 3	dec. 98	B1 deel 3	jan. 99	Kansrekening en statistiek
	B2 deel 2	okt. 98	B2 deel 1	okt. 98	Ruimtemeetkunde 2
	B2 deel 1	jan. 99	B2 deel 2	feb. 99	Toegepaste analyse 2

Basisvorming

Moderne wiskunde 7e ed.	Netwerk 2e ed.
Reeds verschenen:	
1a havo vwo*	1 havo vwo*
1b havo vwo*	
1a mavo havo (vwo)*	1 mavo havo (vwo)*
1b mavo havo (vwo)*	
1a vbo mavo*	1 vbo mavo*
1b vbo mavo*	
Zojuist verschenen:	
1a vbo	1 vbo
1b vbo	

*) U vindt deze delen in de beoordelingspakketten. Heeft u nog geen pakket aangevraagd? Neem dan contact op met onze voorlichter Elka van der Steeg. Bent u gebruiker van Moderne wiskunde 7e editie of Netwerk 2e editie? Dan kunt u gebruikersexemplaren aanvragen van de zojuist verschenen en binnenkort te verschijnen delen van uw methode: Elka van der Steeg, tel (050) 522 63 11, fax (050) 522 62 55, email: voorlichting.vo.exact@wolters.nl.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/8202